TEV

Matematika tau+

9 klasė

1 dalis



TEV

Matematika tau+

9 klasė

2 dalis



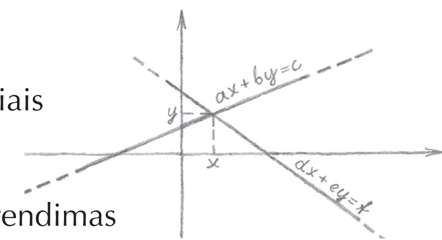
Matematika tau +

9 klasė

1 dalis

TEV

Pagrindiniai skyreliai



Matematika tau^{+} struktūra

Praėjus beveik penkiolikai metų nuo pirmojo TEV vadovėlio pasirodymo, pristatome jau trečiąją savo matematikos vadovėlių seriją. Atnaujinus Pagrindinio ugdymo bendrąsias programas, teko peržiūrėti tiek vadovėlių turinį, tiek jų formą. Kartu pasistengėme į naująją seriją „Matematika Tau^{+}“ perkelti ir atnaujintų programų dvasią.

Galbūt matematinės beletristikos mėgėjai mūsų vadovėliuose pasiges spalvingų piešinukų, pamokymų, kaip susikrauti kuprinę, dvasingų pokalbių „aplink“ matematiką. Tačiau juose ras daug ***tikrosios matematikos****: įdomios ir patraukiančios, užkrečiančios ir viliojančios, įvairių poreikių ir skirtingos motyvacijos vaikams. Ir* ***realių taikymų****, ryšių su aplinkiniu pasauliu bei kitais mokomaisiais dalykais.*

Prieš skyriaus turinio puslapį yra įvadas, kurio tikslas – patraukliai supažindinti su tema, nagrinėjama šiame skyriuje.

Stipresniems mokiniams skirti skyreliai

Pateikiama skyriaus teorijos santrauka ir pavyzdžiai.

Uždavinių atverstiniai žinioms pagilinti ir įtvirtinti. Paskutiniai uždaviniai, pažymėti ženkleliu, skirti smalsesniems.

Samprotavimai, įrodymai, uždaviniai skirti tiems, kurie nori žinoti daugiau.

Informacija mokiniui

Lygčių sistemos

Du kauliukai

Šiame skyriuje susipažinsime su lygtimis, kuriose yra du nežinomieji.

- Svarbiausias šio skyriaus tikslas yra išmokti spręsti dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas.
- Sužinosime, kad sistemas galima spręsti:
  - braižant sistemos lygčių grafikus;
  - išsireiškiant kurį nors lygties nežinomąjį;
  - sudedant (atimant) lygtis.
- Spręsime tekstinius uždavinius sudarydami lygčių sistemas.

Mes kuriame *vadovėlius, orientuotus į ateitį, skirtus šiuolaikiškiems vaikams ir kūrybingiems mokytojams. Kiekvienas TEV vadovėlių komplektas nuo šiol turės bent vieną kompiuterinę mokymo priemonę, kiekvieno vadovėlio kompiuterinę versiją bus galima rasti internete.*

Mes siekiame*, kad mokiniai ne tik skaitytų vadovėlio tekstą, bet ir dirbtų su vadovėliu, pasitelkę kompiuterines mokymo priemones, naudotųsi interneto ištekliais, bendrautų su mokytojais, taikant informacinių technologijų pasiekimus ugdymo procese.*

Mes norime*, kad mokytojai ne tik aktyviai naudotų prie vadovėlio priderintas papildomas mokymo priemones, bet ir patys tobulintų vadovėlio turinį, diferencijuotų mokymą, integruotų matematiką su kitais dalykais, naudodami mobilias interaktyvias kompiuterines (MIKO) knygas, kurios įeina į kiekvienos klasės vadovėlių komplektą.*

Pagrindinių skyrelių atverstiniai, skirti visiems mokiniams:

- **Kairiajame puslapyje yra teorinė medžiaga. Ji pateikiama klausimais ir užduotimis, kurias atlikti padeda šauktukas ir klaustukas. Kas yra svarbiausia – surašyta lentoje.**
- **Dešiniajame puslapyje yra tik su tuo skyreliu susiję uždaviniai.**

Išnagrinėjus pagrindinių skyrelių medžiagą, grįžtama prie įvadiniame puslapyje nagrinėto klausimo.

Baigiamieji skyreliai skirti:

- **Pasitikrinti, kaip pavyko suprasti ir įsiminti skyriuje nagrinėtus dalykus.**
- **Pasikartoti ankstesnę medžiagą ir pasirengti nagrinėti kitą skyrių.**

Šios vadovėlio dalies pradžioje rasite atverstinį „Vasara baigėsi..., ir vėl matematika...“ Jis skirtas projektiniams darbams, susipažinimui su vadovėliu, pasirengimui rimtam darbui.

O šios vadovėlio dalies pabaigoje rasite atverstinį „Ar verta spėlioti?“. Jei išnagrinėsite jame iškeltas problemas, taps kur kas aiškiau, kaip atsakinėti „Kengūros“ konkurso metu.

Mūsų tikslas buvo parengti vadovėlių komplektą – pagalbininką mokytojui, draugišką bet kuriam mokiniui. Kaip tai pavyko – sužinosime po kelerių metų, tačiau atsiliepimų, pastabų, kritikos laukiame visada. Mūsų vadovėlių komplektai yra „gyvi“, atsinaujinantys, nuolat tobulinami, todėl visa tai, kas padėtų pagerinti mūsų kūrinį, atsiras kituose leidimuose.

Ačiū Jums iš anksto!

Šiame matematikos vadovėlyje iš viso yra 8 skyriai (po 4 kiekvienoje dalyje). Kiekvieno iš pirmųjų 7-ių skyrių apytikslę apimtį puslapiais galima užrašyti taip:

$$30 \pm 10.$$

O kaip suprasti taip nurodytą puslapių skaičių?

Tai reiškia, kad kiekviename tame skyriuje yra ne mažiau kaip 20 ir ne daugiau kaip 40 puslapių, t. y.:

$$20 \leqslant 30 \pm 10 \leqslant 40.$$

Lietuvoje devintokai turi mokytis apie 36 savaites.

1 klausimėlis. Manydami, kad kiekvieną iš 8-ių skyrių Jūs mokysitės vienodai laiko, apskaičiuokite, kelios savaitės teks vienam skyriui.

Per savaitę devintokams turi būti 3–4 matematikos pamokos.

O kaip suprasti 3–4 pamokos?

Mažiausiai — 3, daugiausiai — 4.

Bet gali būti, pavyzdžiui, ir 3,5 pamokos per savaitę — pavyzdžiui, pusę mokslo metų po 3 pamokas, pusę — po 4.

2 klausimėlis. Kiek vidutiniškai matematikos pamokų per mokslo metus turi vykti devintokams? Atsakymą užrašykite pavidalu $a \pm b$ (t. y. taip, kaip užrašytas 1–7 skyrių puslapių skaičius).

Kaip neretai pasitaiko, dalis pamokų dėl rimtų, ne visai rimtų ar net visai nerimtų priežasčių neįvyksta ...

3 klausimėlis. Manydami, kad neįvyks 10% matematikos pamokų, apskaičiuokite, kiek pamokų įvyks 3 savaitines pamokas ir kiek — 4 savaitines pamokas turintiems devintokams.

Esant 3,5 pamokoms per savaitę, kai 10% jų neįvyks, iš viso per mokslo metus įvyks:

$$36 \cdot 3{,}5 \cdot 0{,}9 = 113{,}4 \approx 113 \text{ pamokų}.$$

Sunku tikėtis, kad kiekvienas iš jūsų visose tose pamokose dalyvausite — ligos, kelionės, varžybos, konkursai, šiaip bloga nuotaika ...

4 klausimėlis. Apskaičiuokite, keliose matematikos pamokose dalyvaus devintokas, jei jis praleis dešimtadalį vykstančių pamokų, o turi:
a) tris pamokas per savaitę; b) keturias pamokas per savaitę,

Kadangi įvyks 113 pamokų (naudojuosi anksčiau gautuoju skaičiumi), o aš praleisiu *penktadalį* jų, tai būsiu

$$113 - 113 \cdot \frac{1}{5} = 113 - 22{,}6 = \mathbf{90{,}4} \approx 90 \text{ pamokų}.$$

O aš skaičiuosiu taip:

Pamokų skaičius per savaitę ↓ ; Pamokų dalis, kuriose būsiu ↓

$$36 \cdot 3{,}5 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = \mathbf{90{,}72} \approx 91 \text{ pamoka}$$

↑ Savaičių skaičius ; ↑ Įvyksiančių pamokų dalis

5 klausimėlis. Kaip manote, kuris iš šio vadovėlio veikėjų — ? ar ! — gavo tikslesnį rezultatą? Kodėl taip manote?

Aš būsiu ≈ 90 pamokų.

O aš būsiu ≈ 91 pamokoje.

Paskutinė užduotėlė — projektinis darbelis. Jei jums patinka rinkti statistinę informaciją, tai galite pabandyti kruopščiai surinkti duomenis apie šiais metais vyksiančias matematikos (galima ir ne matematikos) pamokas. Mokslo metų gale tuos duomenis apdorokite ir padarykite išvadas. Turėtų būti įdomu ...

- Pirmiausia sugalvokite, ką tirsite.
- Tada nuspręskite, kaip rinksite informaciją (duomenis).
- Pamąstykite, kaip surinktus duomenis apdorosite ir kaip juos pateiksite, kad kitiems būtų aišku, ką, kodėl ir kaip tyrėte ir kokia iš to nauda. Sėkmės!

Veiksmai ir skaičiai

Imkime *natūraliúosius* skaičiùs:

$$N = \{1, 2, 3, ...\}.$$

„Pažaiskime“ su natūraliaisiais skaičiais, atlikdami mums žinomus veiksmus: 1) sudėtį, atimtį; 2) daugybą, dalybą; 3) kėlimą laipsniu, šaknies traukimą.

1) ***Sudedant*** natūraliuosius skaičius, gaunamas skaičius visada yra natūralusis. Pavyzdžiui: $3 + 1 = 4$, $3 + 3 = 6$, $2 + 5 = 7$.
Atimant natūraliuosius skaičius, gaunamas skaičius nebūtinai yra natūralusis. Pavyzdžiui: $3 - 3 = 0$, $3 - 5 = -2$.

Galima sakyti, kad atimtis „atranda“ skaičių 0 ir neigiamuosius skaičius. Natūralieji skaičiai ir „atimties atrasti“ skaičiai vadinami *sveikaĩsiais*.

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

2) ***Dauginant*** natūraliuosius skaičius, gaunamas skaičius visada yra natūralusis. Pavyzdžiui: $3 \cdot 1 = 3$, $3 \cdot 3 = 9$, $1 \cdot 1 = 1$.
Dalijant natūraliuosius skaičius, gaunamas skaičius nebūtinai yra natūralusis. Pavyzdžiui: $1 : 3 = \frac{1}{3}$, $5 : 2 = 2{,}5$.

Galima sakyti, kad dalyba „atranda“ trupmeninius skaičius. Sveikieji skaičiai ir „dalybos atrasti“ trupmeniniai skaičiai vadinami *racionaliaĩsiais*. Visus racionaliuosius skaičius galima užrašyti paprastosiomis trupmenomis $\frac{a}{b}$, kuriose a — sveikasis skaičius, b — natūralusis skaičius. Pavyzdžiui: $2{,}5 = \frac{25}{10}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$.

$$Q = \left\{\frac{a}{b}, \quad a \in Z, b \in N\right\}.$$

3) ***Keliant natūraliuoju laipsniu*** bet kokį natūralųjį skaičių, gaunamas skaičius yra natūralusis. Pavyzdžiui: $3^2 = 9$, $2^3 = 8$, $1^7 = 1$.
Traukiant šaknį iš natūraliojo skaičiaus, gaunamas skaičius nebūtinai yra natūralusis. Pavyzdžiui:

$$\sqrt{9} = 3, \quad \sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt{10} = ?, \quad \sqrt[3]{9} = ?.$$

Tų „šaknų atrastų“ naujųjų skaičių negalima užrašyti paprastosiomis trupmenomis. Tokie skaičiai vadinami *iracionaliaĩsiais*.

Šiame skyriuje nagrinėsime skaičius, iš kurių „neišsitraukia“ kvadratinė šaknis.

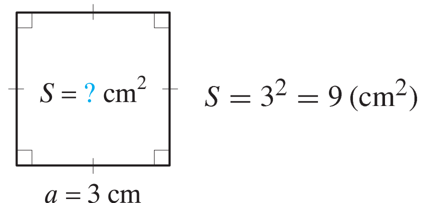
$$\sqrt{9} = 3; \quad \sqrt{10} = ?; \quad \sqrt{11} = ?; \quad \sqrt{12} = ?; \quad \sqrt{13} = ?; \quad ...$$

- Prisiminsime, ką vadiname kvadratine šaknimi iš neneigiamo skaičiaus.
- Mokysimės suprasti ir užrašyti skaičius, iš kurių kvadratinė šaknis „neišsitraukia“.
- Mokysimės atlikti veiksmus su kvadratinėmis šaknimis.

1.1. KVADRATAS IR KVADRATINĖ ŠAKNIS

1 užduotis. Apskaičiuokite kvadrato plotą S, kai jo kraštinė a lygi:
a) 2 cm; b) 3 dm; c) 4 m.

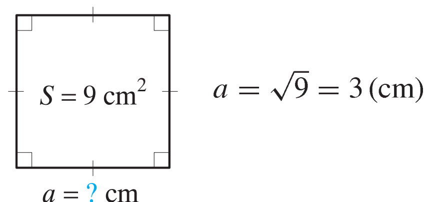
Kai žinome kvadrato kraštinės ilgį a, tai jo plotą S randame a *keldami kvadratu*:
$S = a^2$.



$S = 3^2 = 9\,(\text{cm}^2)$

2 užduotis. Apskaičiuokite kvadrato kraštinės ilgį a, kai jo plotas S lygus:
a) $4\,\text{cm}^2$; b) $9\,\text{dm}^2$; c) $16\,\text{m}^2$.

Kai žinome kvadrato plotą S, tai jo kraštinės ilgį a randame iš S traukdami *kvadratinę šaknį*:
$a = \sqrt{S}$.



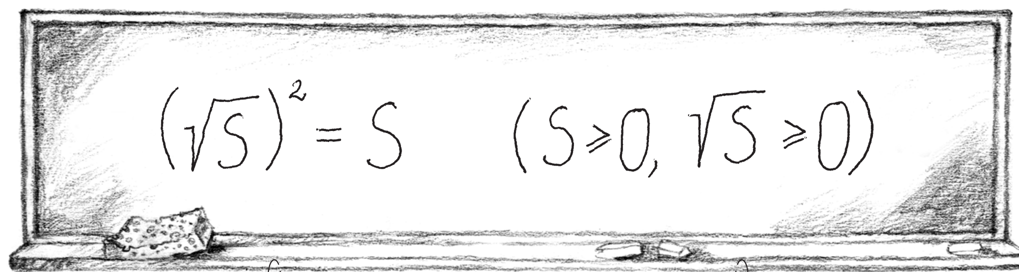
$a = \sqrt{9} = 3\,(\text{cm})$

3 užduotis. Kam lygi kvadrato kraštinė a, kai jo plotas S lygus:
a) $5\,\text{cm}^2$? b) $10\,\text{dm}^2$? c) $17\,\text{m}^2$?

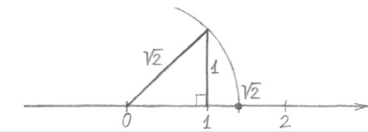
Jei $S = 10\,\text{cm}^2$, tai $a = \sqrt{10}\,\text{cm}$.

O kaip suprasti skaičių $\sqrt{10}$?

$\sqrt{10}$ yra skaičius, kurio kvadratas (antrasis laipsnis) lygus 10, t. y.:
$(\sqrt{10})^2 = 10$.



$\sqrt{S}$ — neneigiamas skaičius, kurio kvadratas lygus S.



1. Apskaičiuokite kvadratinės šaknies reikšmę.
a) $\sqrt{16}$; b) $\sqrt{1600}$; c) $-\sqrt{0{,}0016}$; d) $\sqrt{225}$; e) $\sqrt{2{,}25}$; f) $-\sqrt{225}$;
g) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; h) $\sqrt{\frac{4}{9}}$; i) $\sqrt{\frac{9}{4}}$; j) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; k) $-\sqrt{\frac{25}{36}}$; l) $-\sqrt{1\frac{11}{25}}$.

$\sqrt{11\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$, nes $\left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$ ir $\frac{10}{3} > 0$.
$\sqrt{11\frac{1}{9}} \neq -3\frac{1}{3}$, nes nors $\left(-3\frac{1}{3}\right)^2 = 11\frac{1}{9}$, bet $-3\frac{1}{3} < 0$.
$-\sqrt{11\frac{1}{9}} = -3\frac{1}{3}$.

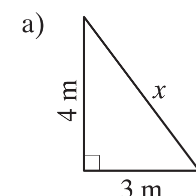
2. Parašykite teigiamą skaičių, kurio kvadratas (antrasis laipsnis) lygus:
a) 100; 0,01; $\frac{1}{10\,000}$; b) 256; 2,56; 25 600; $\frac{1}{256}$; c) $\frac{9}{16}$; $\frac{25}{121}$; $\frac{16}{9}$; $\frac{121}{25}$;
d) $1\frac{7}{9}$; $6\frac{1}{4}$; $2\frac{14}{25}$; e) 10; 20; $\frac{1}{20}$; $\frac{3}{10}$; $1\frac{2}{3}$; $2\frac{3}{4}$.

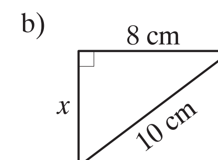
3. Pakelkite kvadratu (antruoju laipsniu) skaičius:
a) $\sqrt{5}$; $\sqrt{0{,}5}$; $-\sqrt{5}$; $-\sqrt{0{,}5}$; b) $\sqrt{2\frac{1}{2}}$; $\sqrt{3\frac{2}{3}}$; $-\sqrt{2\frac{1}{2}}$; $-\sqrt{3\frac{2}{3}}$.

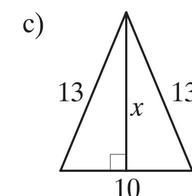
$-\sqrt{3}$ — neigiamas skaičius;
$(-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$ — neigiamo skaičiaus kvadratas yra teigiamas skaičius.

4. 1) Užrašykite, kam lygi kvadrato kraštinė a, jei kvadrato plotas:
a) $S = 3\,\text{cm}^2$; b) $S = 12\,\text{mm}^2$; c) $S = 0{,}5\,\text{m}^2$.
2) Apskaičiuokite kvadrato plotą S, jei jo kraštinė:
a) $a = \sqrt{2}\,\text{cm}$; b) $a = \sqrt{3}\,\text{mm}$; c) $a = \sqrt{5}\,\text{dm}$.

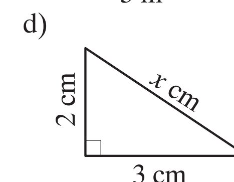
5. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite x reikšmę.

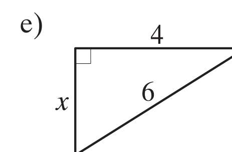
a)


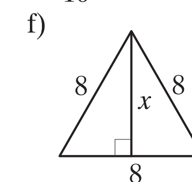
b)


c)


Prisiminkite Pitagoro teoremą!

d)


e)


f)


1.2. $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ...

Surašykime pirmuosius dešimt natūraliųjų skaičių:

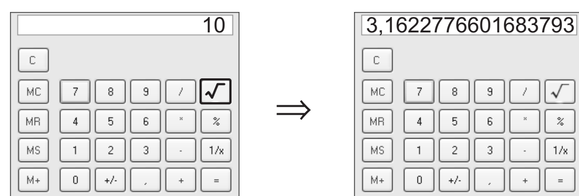
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

ir kvadratines šaknis iš jų:

$\sqrt{1}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{9}$ $\sqrt{10}$

Užduotis.

1) Skaičiuotuvù nustatykite tų šaknų reikšmes. Tas reikšmes, kurios nėra natūralieji skaičiai, suapvalinkite iki dešimtųjų.

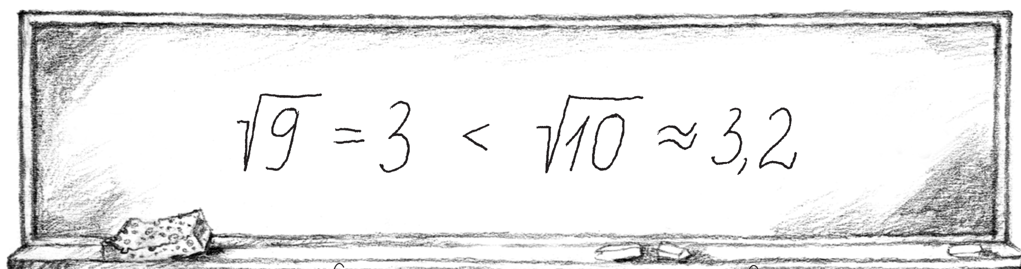


$\sqrt{10} = 3{,}\underline{1}6227766... \approx 3{,}2$

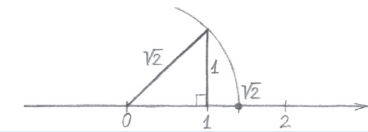
Skaičiaus $\sqrt{10}$ užrašas dešimtainiu pavidalu yra begalìnė dešimtaĩnė neperiòdinė trùpmena. Skaičius $\sqrt{10}$ yra *iracionalus*. Iracionaliųjų skaičių yra be galo daug.

2) Koks ženklas ($>$, $<$ ar $=$) turėtų būti parašytas vietoj kvadratėlių?

$\sqrt{1}$ □ $\sqrt{2}$ □ $\sqrt{3}$ □ $\sqrt{4}$ □ $\sqrt{5}$ □ $\sqrt{6}$ □ $\sqrt{7}$ □ $\sqrt{8}$ □ $\sqrt{9}$ □ $\sqrt{10}$

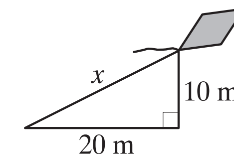


Jei $a > b$, tai $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ (čia a ir b neneigiami skaičiai).



6. Skaičiuotuvu nustatykite apytikslę šaknies reikšmę. Atsakymą pateikite suapvalinę iki šimtųjų.
a) $\sqrt{11}$; b) $\sqrt{78}$; c) $\sqrt{205}$; d) $\sqrt{99}$.

7. Koks aitvaro virvės ilgis x metrais?
Atsakymą parašykite dešimtųjų tikslumu.

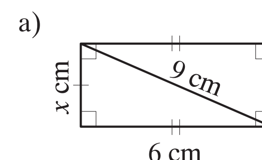


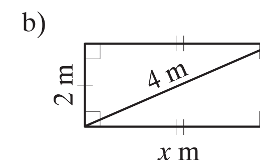
8. Skaičius surašykite didėjimo tvarka.
a) $\sqrt{5}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{1}$; $-\sqrt{2}$; $-\sqrt{5}$; 0;
b) $\sqrt{2}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{6}$; $-\sqrt{6}$; $-\sqrt{2}$; $-\sqrt{7}$;
c) $-\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $-\sqrt{\frac{3}{5}}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}$; $\sqrt{0{,}67}$.

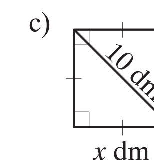
Jei $a > b$, tai:
$\sqrt{a} > \sqrt{b}$,
$-\sqrt{a} < -\sqrt{b}$.

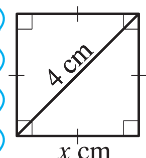
9. Skaičius surašykite mažėjimo tvarka.
a) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{1}$; $\sqrt{1}$;
b) $\sqrt{8}$; $-\sqrt{8}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $-\sqrt{9}$; $\sqrt{10}$;
c) $\sqrt{2\frac{1}{3}}$; 2; $-3{,}2$; $-\sqrt{15\frac{1}{4}}$; $\sqrt{2{,}2}$; $-\sqrt{11}$.

10. Apskaičiuokite stačiakampio nežinomos kraštinės ilgį. Atsakymą suapvalinkite iki sveikojo skaičiaus.

a) 

b) 

c) 

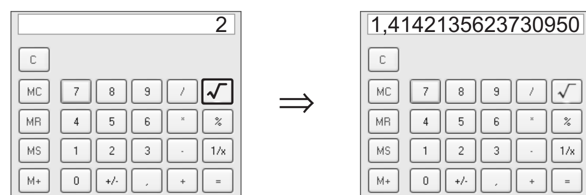


Pagal Pitagoro teoremą:
$x^2 + x^2 = 4^2$, $2x^2 = 16$, $x^2 = 8$.
Lygtis $x^2 = 8$ turi du sprendinius:
$x = -\sqrt{8}$ ir $x = \sqrt{8}$, nes ir $(-\sqrt{8})^2 = 8$, ir $(\sqrt{8})^2 = 8$.
Bet kraštinės ilgis x negali būti lygus neigiamam skaičiui.
Vadinasi, $x = \sqrt{8} \approx 2{,}8 \approx 3$. *Atsakymas.* ≈ 3 cm.

11. Jonas apskaičiavo skritulio plotą S, žinodamas, kad jis 3,14 karto didesnis už skritulio spindulio ilgio r kvadratą. Koks to skritulio spindulio ilgis, jei jo plotas:
a) $S = 6{,}28\ \text{cm}^2$? b) $S = 15{,}7\ \text{dm}^2$? c) $S = 31{,}4\ \text{mm}^2$?
Atsakymą parašykite šimtosios tikslumu.

1.3. SKAIČIAUS $\sqrt{2}$ VIETA SKAIČIŲ TIESĖJE

Užrašykime skaičių, kurio kvadratas lygus 2. Tas skaičius yra $\sqrt{2}$.
Į skaičiuotuvą įveskime skaičių 2 ir paspauskime mygtuką su ženklu $\sqrt{\ }$.

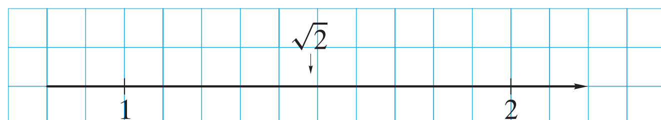


⇒ Vadinasi, $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$

Užduotis. Remdamiesi dešimtaine $\sqrt{2}$ reikšme, nustatykite, tarp kokių:

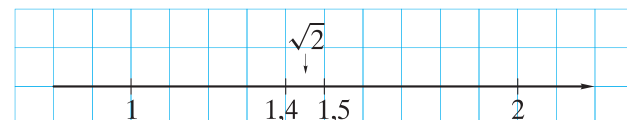
1) gretimų natūraliųjų skaičių yra skaičius $\sqrt{2}$, ir pažymėkite apytikslę jo vietą skaičių tiesėje (vienetinę atkarpą imkite lygią 10 langelių ilgiui);

$1 < \sqrt{2} < 2$



2) gretimų dešimtainių trupmenų, turinčių vieną skaitmenį po kablelio, yra skaičius $\sqrt{2}$, ir pažymėkite apytikslę jo vietą skaičių tiesėje.

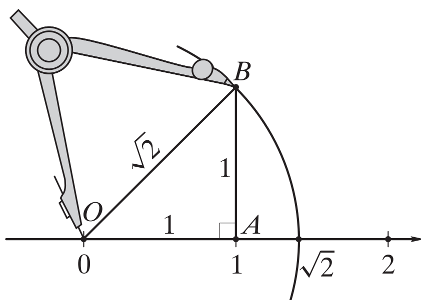
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$



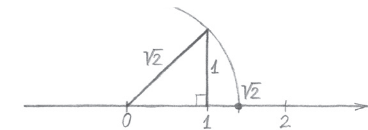
3) gretimų dešimtainių trupmenų, turinčių du skaitmenis po kablelio, yra skaičius $\sqrt{2}$, ir pažymėkite apytikslę jo vietą skaičių tiesėje.

Tęsiant šį procesą, galima nustatyti vis tikslesnę $\sqrt{2}$ vietą skaičių tiesėje. Deja, tas procesas begalinis ... O kaip pažymėti *tikslią* $\sqrt{2}$ vietą skaičių tiesėje?

Čia teks šį tą sugalvoti...



1) Ant skaičių tiesės nubraižykime statųjį trikampį OAB, kurio statinių ilgiai lygūs 1 ($OA = AB = 1$).
2) To trikampio įžambinės ilgis lygus $\sqrt{2}$:
$OB^2 = OA^2 + AB^2$,
$OB^2 = 1^2 + 1^2$,
$OB^2 = 2$,
$OB = \sqrt{2}$.
3) Lieka pasinaudoti skriestuvu.



12. Nustatykite, tarp kokių gretimų natūraliųjų skaičių yra kiekvienas duotasis skaičius, ir nurodykite kiekvieno jų apytikslę vietą skaičių tiesėje.

$\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{12}$.

13. 1) Skaičių tiesėje pažymėkite iracionaliuosius skaičius $\sqrt{5}$ ir $-\sqrt{5}$, braižydami statųjį trikampį, kurio statinių ilgiai yra 1 ir 2.
2) Braižydami statųjį trikampį, skaičių tiesėje pažymėkite skaičių $\sqrt{8}$; skaičių $-\sqrt{10}$.

14. Skaičių tiesėje taškais pažymėti iracionalieji skaičiai, kurie yra surašyti debesėlyje.

a) $-\sqrt{5}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\sqrt{2\frac{1}{2}}$ $-\sqrt{2{,}5}$ $\sqrt{\frac{15}{7}}$



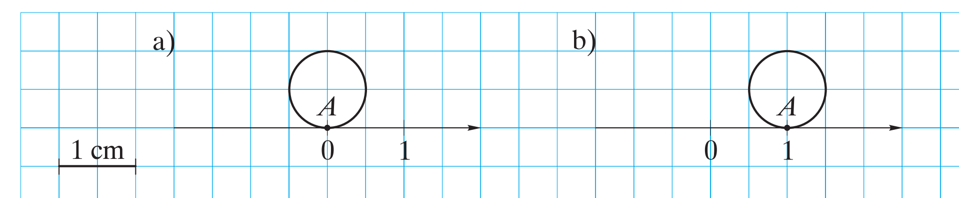
b) $-\sqrt{10}$ $\sqrt{\frac{1}{10}}$ $-\sqrt{0{,}001}$ $-\sqrt{\frac{99}{10}}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{2\frac{3}{4}}$ $-\sqrt{\frac{14}{5}}$



1) Koks skaičius kurį tašką atitinka?
2) Tarp kokių pažymėtų taškų yra taškas $O(0)$? $G(1)$? $Z(-1)$?

Kuo skaičius yra didesnis, tuo jis skaičių tiesėje yra dešiniau.

15. Ant apskritimo pažymėtas taškas A. Apskritimas padėtas ant skaičių tiesės taip, kad taškas A yra toje tiesėje.



Apskritimas pradeda riedėti skaičių tiese ir rieda tol, kol taškas A vėl atsiduria skaičių tiesėje. Su kuriuo skaičiumi sutaps taškas A, jei apskritimo spindulio ilgis lygus 1 cm? 2 cm? Atsakymą parašykite 0,1 tikslumu.

Skaičius $\pi = 3{,}1415\ldots$ yra iracionalusis skaičius.

1.4. $\sqrt{a}+\sqrt{a}$

Prisiminkime, kaip užrašoma vienodų dėmenų suma.
Pavyzdžiui:

$$3+3=3\cdot 2=6$$
$$a+a=a\cdot 2=2a$$
$$\underbrace{x+x+\dots+x}_{n\ \text{dėmenų}}=x\cdot n=nx$$

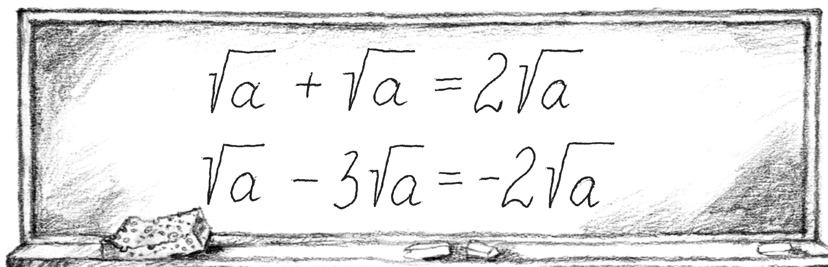
Daugybos ženklas tarp skaičiaus ir raidės ir tarp raidžių dažniausiai nerašomas.

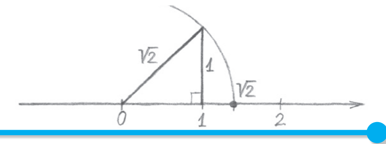
1 užduotis. Užrašykite, kam lygi vienodų iracionaliųjų skaičių suma.
a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}$; $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$; $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$;
b) $\sqrt{3}+\sqrt{3}$; $\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$; $\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$;
c) $\sqrt{x}+\sqrt{x}$; $\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}$; $\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}$.

$\sqrt{10}+\sqrt{10}=\sqrt{10}\cdot 2=2\cdot\sqrt{10}=2\sqrt{10}$.
Sandaugą $\sqrt{10}\cdot 2$ įprasta rašyti taip: $2\cdot\sqrt{10}$.
Sandaugoje $2\cdot\sqrt{10}$ daugybos ženklas dažniausiai nerašomas: $2\sqrt{10}$.
Skaitome: Dvi šaknys iš dešimt.

2 užduotis. Sudėkite (atimkite) iracionaliuosius skaičius, kurių pošakniai yra vienodi.
a) $5\sqrt{3}+2\sqrt{3}$; $5\sqrt{3}-4\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$; $5\sqrt{3}-6\sqrt{3}$;
b) $5\sqrt{x}+2\sqrt{x}$; $5\sqrt{x}-4\sqrt{x}$; $2\sqrt{x}+5\sqrt{x}$; $5\sqrt{x}-6\sqrt{x}$.

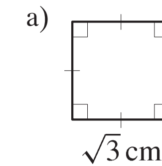
$2\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}+1\cdot\sqrt{3}=(2+1)\cdot\sqrt{3}=3\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{3}$
$2\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}-1\cdot\sqrt{3}=(2-1)\cdot\sqrt{3}=1\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$
$\sqrt{3}-2\sqrt{3}=1\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{3}=(1-2)\cdot\sqrt{3}=-1\cdot\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

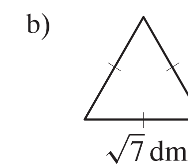


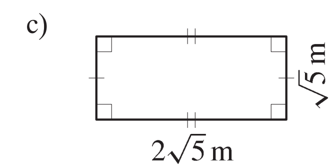


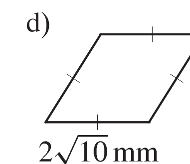
16. Atlikite veiksmus su iracionaliaisiais skaičiais.
a) $\sqrt{15}+\sqrt{15}$; b) $2\sqrt{15}+\sqrt{15}$; c) $3\sqrt{15}+12\sqrt{15}+\sqrt{15}$;
d) $\sqrt{15}-\sqrt{15}$; e) $2\sqrt{15}-\sqrt{15}$; f) $\sqrt{15}-2\sqrt{15}$;
g) $\sqrt{7}+2\sqrt{7}-4\sqrt{7}$; h) $5\sqrt{10}-7\sqrt{10}+4\sqrt{10}-\sqrt{10}$.

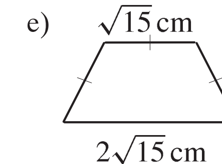
17. Apskaičiuokite pavaizduotos figūros perimetrą.

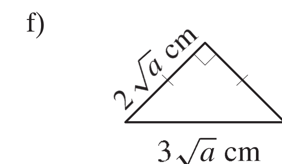
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

18. 1) Sudėkite (atimkite).
a) $2\sqrt{3}+2{,}5\sqrt{3}$; b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}+1{,}5\sqrt{2}$;
c) $\sqrt{5}+1{,}1\sqrt{5}$; d) $\frac{2}{3}\sqrt{6}+0{,}25\sqrt{6}$;
e) $2{,}5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$; f) $\frac{1}{2}\sqrt{2}-1{,}5\sqrt{2}$;
g) $\sqrt{5}-1{,}1\sqrt{5}$; h) $\frac{2}{3}\sqrt{6}-0{,}25\sqrt{6}$.

$\sqrt{10}+\frac{1}{2}\sqrt{10}=$
$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{10}=$
$=1\frac{1}{2}\sqrt{10}$.

$\frac{1}{2}\sqrt{10}-\sqrt{10}=$
$=\left(\frac{1}{2}-1\right)\sqrt{10}=$
$=-\frac{1}{2}\sqrt{10}$.

19. 1) Apskaičiuokite reiškinio $\sqrt{4}+\sqrt{9}$ reikšmę.
2) Nustatykite reiškinio $\sqrt{13}$ apytikslę reikšmę dešimtųjų tikslumu.
3) Kokį ženklą (< ar >) reikia parašyti vietoj kvadratėlio:
$\sqrt{4}+\sqrt{9}$ □ $\sqrt{4+9}$?
4) Nustatykite, kokį ženklą (< ar >) reikia parašyti vietoj kvadratėlio.
a) $\sqrt{25}+\sqrt{100}$ □ $\sqrt{25+100}$; b) $\sqrt{16}+\sqrt{25}$ □ $\sqrt{16+25}$;
c) $\sqrt{81}-\sqrt{64}$ □ $\sqrt{81-64}$; d) $\sqrt{100}-\sqrt{49}$ □ $\sqrt{100-49}$.

20. Naudodamiesi skaičiuotuvu, nustatykite, kuris skaičius yra didesnis:
a) $1+\sqrt{2}$ ar $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ar $\frac{1}{2}$; c) $\sqrt{7}+\sqrt{12}$ ar $\sqrt{122}-\sqrt{26}$.

O kam lygi, pavyzdžiui, tokia suma $\sqrt{2}+\sqrt{3}$?

Sumos $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ trumpiau neužrašysi. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ yra iracionalus skaičius.

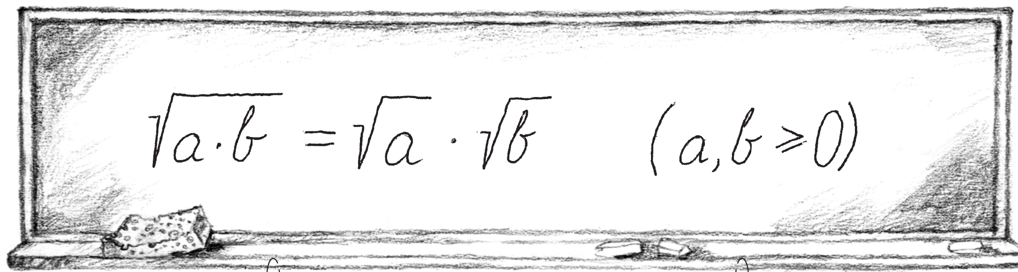
1.5. $\sqrt{a \cdot b}$

1 užduotis. Imkime dviejų neneigiamų skaičių 4 ir 9 sandaugą $4 \cdot 9$ ir panagrinėkime kvadratinę šaknį iš tos sandaugos:

$\sqrt{4 \cdot 9}$.

1) Apskaičiuokite pošaknyje esančios sandaugos reikšmę.
2) Iš gautojo skaičiaus ištraukite šaknį.
3) O dabar šaknis ištraukite iš kiekvieno dauginamojo (4 ir 9) atskirai ir įsitikinkite, kad teisinga tokia lygybė:

$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$.



Šaknis iš sandaugos lygi šaknų iš dauginamųjų sandaugai.

2 užduotis. O dabar pošaknyje imkime sandaugą, kurios vieno dauginamojo šaknis neištraukiama:

$\sqrt{4 \cdot 10}$.

1) Šaknį iš sandaugos užrašykime kaip šaknų iš tų dauginamųjų sandaugą:

$\sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10}$.

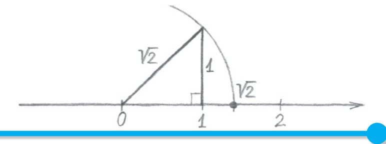
2) Raskite $\sqrt{4}$ reikšmę. Iš 10 šaknis neišsitraukia.

Vadinasi,

$\sqrt{4 \cdot 10} = 2 \cdot \sqrt{10}$.

Daugybos ženklo tarp 2 ir $\sqrt{10}$ galima nerašyti: $2 \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$.

Rašome: $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
Sakome: Iškėlėme dauginamąjį prieš šaknies ženklą.



21. Apskaičiuokite pasinaudodami formule $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
a) $\sqrt{9 \cdot 25}$; b) $\sqrt{64 \cdot 100}$; c) $\sqrt{49 \cdot 144}$;
d) $\sqrt{400 \cdot 0{,}16}$; e) $\sqrt{0{,}04 \cdot 225}$; f) $\sqrt{10\,000 \cdot 529}$.

22. Pritaikę formulę $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, apskaičiuokite sandaugos reikšmę.
a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$; b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; c) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}$; d) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}$; e) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$.

Lygybę $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ galima parašyti atbulai: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$

23. Iškelkite dauginamąjį prieš šaknies ženklą.
a) $\sqrt{9 \cdot 5}$; b) $\sqrt{16 \cdot 10}$; c) $\sqrt{15 \cdot 25}$; d) $\sqrt{11 \cdot 100}$; e) $\sqrt{36 \cdot 3}$.

24. Pošaknyje esantį skaičių išskaidę dauginamaisiais, iškelkite dauginamąjį prieš šaknies ženklą.
a) $\sqrt{12}$; b) $\sqrt{18}$; c) $\sqrt{20}$;
d) $\sqrt{27}$; e) $\sqrt{50}$; f) $\sqrt{48}$.

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} =$
$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

25. Iškelkite dauginamąjį prieš šaknies ženklą ir suprastinkite.
a) $\sqrt{8} + 3\sqrt{2}$; b) $\sqrt{12} + 2\sqrt{3}$; c) $2\sqrt{20} - \sqrt{5}$; d) $3\sqrt{50} - \sqrt{72}$.

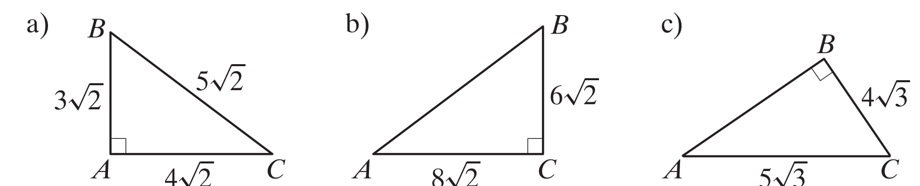
26. Atskliauskite.
a) $\sqrt{2} \cdot (7 + \sqrt{2})$; b) $\sqrt{3} \cdot (6 - 2\sqrt{3})$;
c) $\sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$; d) $\sqrt{7}(\sqrt{3} - \sqrt{7})$;
e) $-\sqrt{3}(2 + \sqrt{2})$; f) $-\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$;
g) $-\sqrt{8}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$; h) $\sqrt{6}(\sqrt{2} - 2\sqrt{5})$.

$\sqrt{5}(2\sqrt{5} - \sqrt{2}) =$
$= \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} =$
$= 2 \cdot (\sqrt{5})^2 - \sqrt{5 \cdot 2} =$
$= 2 \cdot 5 - \sqrt{10} = 10 - \sqrt{10}$

27. Įkelkite dauginamąjį po šaknies ženklu.
a) $3\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{2}$; c) $5\sqrt{2}$;
d) $10\sqrt{3}$; e) $6\sqrt{5}$; f) $10\sqrt{10}$.

$2\sqrt{2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} =$
$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} =$
$= \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8}$

28. Apskaičiuokite trikampio perimetrą ir plotą.



$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, $\quad (2\sqrt{3})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$

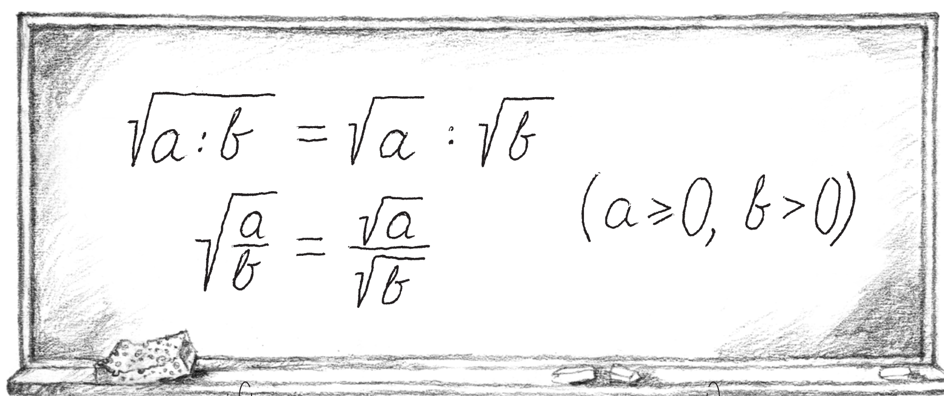
1.6. $\sqrt{a : b}$

1 užduotis. Imkime dviejų teigiamų skaičių 100 ir 25 dalmenį 100 : 25 ir panagrinėkime kvadratinę šaknį iš to dalmens:

$$\sqrt{100 : 25}.$$

1) Apskaičiuokite pošaknyje esančio dalmens reikšmę.
2) Iš gautojo skaičiaus ištraukite šaknį.
3) O dabar, ištraukę šaknis iš dalinio ir iš daliklio, įsitikinkite, kad teisinga tokia lygybė:

$$\sqrt{100 : 25} = \sqrt{100} : \sqrt{25}.$$



Traukiant šaknį iš trupmenos, galima šaknis traukti iš skaitiklio ir iš vardiklio atskirai.

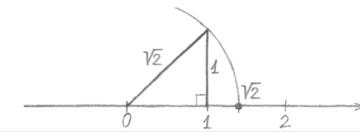
2 užduotis. Įsitikinkite, kad teisinga tokia lygybė:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}.$$

3 užduotis. Nesinaudodami skaičiuotuvu, raskite šaknies $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ reikšmę.

Mišrųjį skaičių $2\frac{1}{4}$ paverskite netaisyklìngąja trùpmena.





29. Apskaičiuokite pritaikę formulę $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$.

a) $\sqrt{9 : 16}$; b) $\sqrt{25 : 4}$; c) $\sqrt{81 : 36}$;
d) $\sqrt{10\,000 : 6400}$; e) $\sqrt{169 : 0{,}04}$; f) $\sqrt{4{,}84 : 2{,}56}$;
g) $\sqrt{\frac{144}{400}}$; h) $\sqrt{\frac{225}{1225}}$; i) $\sqrt{\frac{1{,}96}{196}}$;
j) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; k) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; l) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

30. Pritaikę formulę $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, apskaičiuokite trupmenos reikšmę.

a) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$; d) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{700}}$; e) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{40}}$; f) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{96}}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{242}} = \sqrt{\frac{2}{242}} = \sqrt{\frac{1}{121}} = \frac{1}{11}$$

31. Apskaičiuokite.

a) $\sqrt{\frac{4}{9} \cdot 3\frac{1}{16}}$; b) $\sqrt{\frac{16}{81} \cdot 12\frac{1}{4}}$; c) $\sqrt{5\frac{1}{16} \cdot \frac{100}{225}}$;
d) $\sqrt{1\frac{11}{25} \cdot \frac{625}{2025}}$; e) $\sqrt{2\frac{14}{25} \cdot 10\frac{1}{36}}$; f) $\sqrt{3\frac{61}{100} \cdot 1\frac{36}{64}}$.

Apskaičiuokime $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 1\frac{7}{9}}$.

I būdas. $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 16}{4 \cdot 9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

II būdas. $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

32. Suprastinkite. Kur galima, iškelkite dauginamąjį prieš šaknies ženklą.

a) $\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{5\sqrt{3}}{10\sqrt{3}}$; c) $\frac{\sqrt{8}}{4\sqrt{2}}$; d) $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$; e) $\frac{3\sqrt{28}}{2\sqrt{7}}$; f) $\frac{4\sqrt{12}}{\sqrt{48}}$.

$$\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{4 \cdot 3}} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{4}{1} = 4$$

33. Raskite duotųjų skaičių sumą, skirtumą, sandaugą ir dalmenį.

a) $\sqrt{8}$ ir $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{5}$ ir $\sqrt{20}$; c) $\sqrt{12}$ ir $\sqrt{27}$; d) $\sqrt{90}$ ir $\sqrt{40}$.

Skaičių $\sqrt{2}$ ir $\sqrt{3}$:
suma $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; skirtumas $\sqrt{2} - \sqrt{3}$;
sandauga $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$; dalmuo $\sqrt{2} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

1.7. REIŠKINIAI SU KVADRATINĖMIS ŠAKNIMIS

Prisiminkime:

- Kai reiškinyje yra tik sudėties ir atimties veiksmai, tai tie veiksmai atliekami iš kairės į dešinę ta tvarka, kuria yra surašyti.

$$2+3-4+(-5)=5-4+(-5)=1+(-5)=-4$$

- Kai reiškinyje yra tik daugybos ir dalybos veiksmai, tai tie veiksmai atliekami iš kairės į dešinę ta tvarka, kuria yra surašyti.

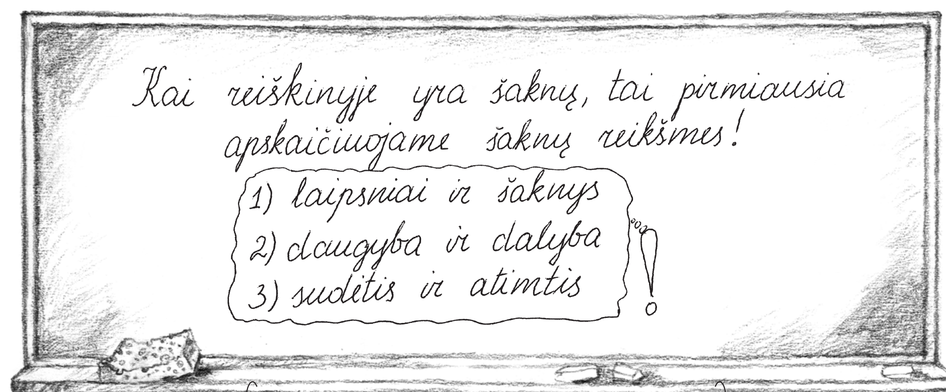
$$4\cdot 2:(-5)\cdot 3=8:(-5)\cdot 3=-1{,}6\cdot 3=-4{,}8$$

- Kai reiškinyje yra sudėties, atimties, daugybos ir dalybos veiksmai, tai pirmiausia dauginame ir dalijame, o tada — sudedame ir atimame.

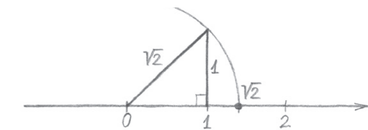
$$4+6:(-3)-5\cdot 2=4+(-2)-10=2-10=-8$$

- Kai reiškinyje yra laipsnių, tai pirmiausia apskaičiuojame laipsnių reikšmes.

$$10-5^2\cdot 2=10-25\cdot 2=10-50=-40$$



$$2\cdot(5+\sqrt{9}):(-7+3^2)=2\cdot(5+3):(-7+9)=2\cdot 8:2=16:2=8$$



34. Apskaičiuokite skaitinio reiškinio reikšmę.

a) $\sqrt{9}\cdot 2^3-6:(-2)$; b) $\sqrt{9}\cdot\left(2^3-3\right):(-2)$;

c) $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}-2\sqrt{8}\right)+\left(2\sqrt{3}\right)^2$; d) $-\sqrt{50}\cdot\left(3\sqrt{2}+\sqrt{50}\right)-\left(\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{9}}\right)$;

e) $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{18}-2^2\right)+\sqrt{32}$; f) $-\sqrt{25}\cdot(-3)^2+\frac{4\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$.

Jei reiškinyje yra apskliaustų veiksmų, tai pirmiausia atliekami veiksmai skliaustuose.

35. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+5}\right)\cdot x$, kai $x=4$; $x=0$; $x=1$;

b) $x^2\cdot\sqrt{x^2-1}$, kai $x=1$; $x=-1$; $x=2$;

c) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{\sqrt{x+3}}$, kai $x=1$; $x=-2$; $x=4$.

Kai $x=2$, tai $\sqrt{x+5}=\sqrt{2+5}=$
$=\sqrt{7}$

36. 1) Užrašykite, kam lygus apskritimo ilgis C ir jo ribojamas plotas S, jei to apskritimo spindulio ilgis r lygus:

a) $\sqrt{2}$ cm; b) $\sqrt{3}$ dm; c) $\sqrt{5}$ m.

2) Apskaičiuokite to apskritimo ilgio ir ploto apytiksles reikšmes (π ir šaknies reikšmes suapvalinę iki dešimtųjų).

Apskritimo ilgis $C=2\pi r$. Skritulio plotas $S=\pi r^2$.

Jei $r=\sqrt{10}$ cm, tai $C=2\pi\sqrt{10}\approx 2\cdot 3{,}1\cdot 3{,}2=19{,}84$ (cm),
$S=\pi\cdot\left(\sqrt{10}\right)^2=10\pi\approx 10\cdot 3{,}1=31$ (cm^2).

37. Pritaikę formulę $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, apskaičiuokite.

a) $\left(3+\sqrt{2}\right)^2$; b) $\left(\sqrt{3}+4\right)^2$; c) $\left(5-\sqrt{2}\right)^2$; d) $\left(\sqrt{10}-2\right)^2$;

e) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$; f) $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2$; g) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$; h) $\left(\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2$.

$$\left(\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{7}\right)^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2=7-4\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+8=$$
$$=15-4\sqrt{14}$$

38. Atspėkite, su kuria x reikšme reiškinio:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{x}$ reikšmė lygi 0; lygi 2; lygi 20;

b) $\sqrt{x^2+1}$ reikšmė lygi $\sqrt{2}$.

APIBENDRINAME

Neneigiamas skaičius, kurio kvadratas lygus skaičiui a, vadinamas *kvadrãtine šaknimì* iš a. *Rašoma* $\sqrt{a}$.

$(\sqrt{a})^2 = a$,
$\sqrt{a} \geqslant 0$, $a \geqslant 0$

Iš neneigiamo skaičiaus a traukdami kvadratinę šaknį, ieškome tokio neneigiamo skaičiaus b, kurio kvadratas lygus a.

$\sqrt{a} = b$, $b^2 = a$,
$a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

Kvadratinė šaknis iš skaičiaus, kuris nėra racionaliojo skaičiaus kvadratas, yra iracionalusis skaičius.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ — iracionalieji skaičiai

- Iracionaliojo skaičiaus negalima užrašyti paprastąja trupmena ($\frac{a}{b}$, $a \in \boldsymbol{Z}$, $b \in \boldsymbol{N}$).
- Iracionaliojo skaičiaus negalima užrašyti nei baigtine dešimtaine trupmena, nei begaline dešimtaine periodine trupmena.
- Iracionalųjį skaičių rašant dešimtaine trupmena, gaunama trupmena yra begalinė neperiodinė.

$\sqrt{2} = 1{,}41421356...$
$\sqrt{3} = 1{,}73205080...$

Skaičius π — iracionalusis skaičius.

$\pi = 3{,}1415...$

Kvadratinių šaknų savybės:

1) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\quad a, b \geqslant 0$

$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3$
$\sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2 \cdot \sqrt{10}$

2) $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$, $\quad a \geqslant 0$, $b > 0$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\sqrt{9 : 4} = \sqrt{9} : \sqrt{4} = 3 : 2$
$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

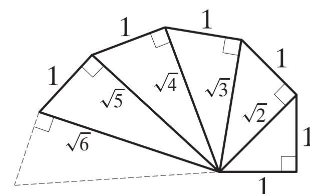
3) $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$, $\quad a, b \geqslant 0$

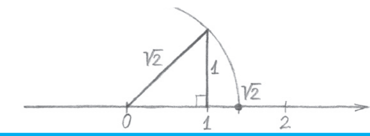
$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$

4) $\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{4^2} = 4$, $\sqrt{(-4)^2} = 4$.

Nubrėžti atkarpas, kurių ilgiai lygūs $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ..., galima remiantis stačiaisiais trikampiais.





Skaičių aibės

Natūraliẽji skaĩčių aibė žymima raide $\boldsymbol{N}$:

$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

> Aibės elementai rašomi riestiniuose skliaustuose.

Prie natūraliųjų skaičių aibės prijungę skaičių 0 ir skaičius, priešingus natūraliesiems, gauname ***sveikų̃jų*** skaĩčių aibę. Ji žymima raide $\boldsymbol{Z}$:

$\boldsymbol{Z} = \{1, 2, 3, ...\} \cup \{..., -3, -2, -1\} \cup \{0\} =$
$= \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

> Ženkliuku „∪“ žymima aibių sąjunga.

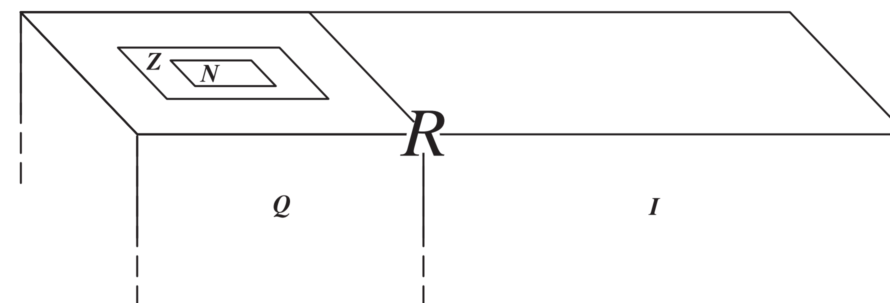
Prie sveikųjų skaičių aibės prijungę trupmeninius skaičius (kurie nelygūs sveikiesiems skaičiams), gauname ***racionalių̃jų*** skaĩčių aibę. Racionaliųjų skaičių aibė žymima raide $\boldsymbol{Q}$:

$\boldsymbol{Q} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \cup$

$$\cup \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ -\frac{7}{5},\ -\frac{6}{5},\ -\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5}\ \ldots \\ \ldots\ -\frac{7}{4},\ -\frac{6}{4},\ -\frac{5}{4},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{2}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4}\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ -\frac{7}{2},\ -\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2}\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Prie racionaliųjų skaičių prijungę skaičius, kurių negalima užrašyti paprastosiomis trupmenomis (tie skaičiai vadinami ***iracionaliaĩsiais***, jų aibė žymima raide $\boldsymbol{I}$), gauname ***realių̃jų*** skaĩčių aibę. Realiųjų skaičių aibė žymima raide $\boldsymbol{R}$:

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$.



SPRENDŽIAME

39. Apskaičiuokite.

a) $0{,}6\sqrt{196}-\sqrt{289}$; b) $\frac{4}{\sqrt{144}}-\frac{1}{2\sqrt{36}}$;

c) $6-\left(5\cdot\sqrt{\frac{4}{25}}+\sqrt{0{,}49}\right)$; d) $\frac{3}{4}\sqrt{0{,}16}-\frac{\sqrt{0{,}64}}{0{,}2}+5\frac{1}{6}$.

40. Ar yra tokia x reikšmė, su kuria būtų teisinga užrašytoji lygybė? Atsakymą pagrįskite.

a) $\sqrt{x}=1$; b) $\sqrt{x}=-1$; c) $-\sqrt{x}=5$;

d) $-\sqrt{x}=-\sqrt{5}$; e) $\sqrt{x}+3=0$; f) $\sqrt{x}+3=10$.

41. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $\sqrt{8-2x}$, kai $x=4$; $x=-12$; $x=0{,}8$; $x=1$; $x=-1$;

b) $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$, kai $x=0$; $x=1$; $x=0{,}36$; $x=\frac{1}{4}$; $x=2$.

42. Apskaičiuokite reiškinio $\sqrt{b^2-4ac}$ reikšmę, kai:

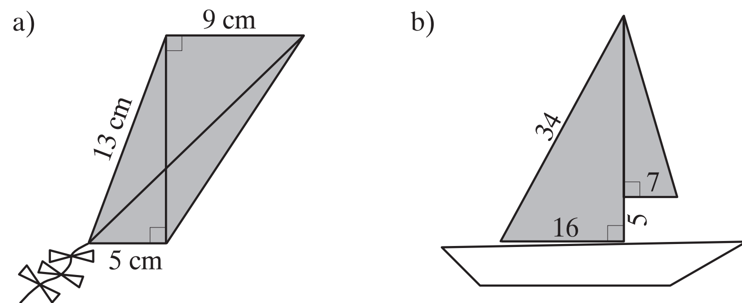
a) $a=1,\ b=8,\ c=15$; b) $a=1,\ b=4,\ c=-5$;

c) $a=1,\ b=-7,\ c=12$; d) $a=4,\ b=-5,\ c=1$;

e) $-a=5,\ b=-7,\ -c=1$; f) $a=2,\ b=-2,\ c=-5$;

g) $a=1,\ b=2,\ c=-1$; h) $a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2},\ c=-1\frac{1}{2}$.

43. Apskaičiuokite aitvarą ir laivo bures vaizduojančių figūrų plotus.

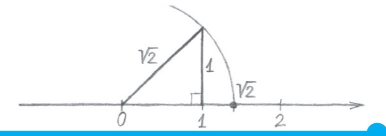


44. Turistai iš stovyklavietės pasuko šiaurės kryptimi ir nuėjo a kilometrų. Trumpai pailsėję, jie iškeliavo rytų kryptimi ir nuėjo dar b kilometrų. Kokiu atstumu s nuo stovyklavietės nukeliavo turistai, jei:

a) $a=2$ km, $b=3$ km? b) $a=4$ km, $b=5$ km?

c) $a=3{,}5$ km, $b=4{,}5$ km? d) $a=2320$ m, $b=1$ km 100 m?

Nurodykite tikslią bei apytikslę (1 m tikslumu) s reikšmes.



45. Pakelkite kvadratu.

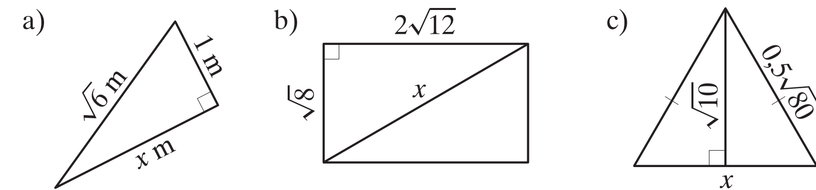
a) $2\sqrt{5}$; b) $-0{,}5\sqrt{9}$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{12}$; d) $\frac{2}{9}\sqrt{81}$; e) $-1{,}1\sqrt{2\frac{3}{4}}$.

46. Apskaičiuokite.

a) $\left(3\sqrt{9}\right)^2+\left(0{,}5\sqrt{4}\right)^2$; b) $-3^3+0{,}2\left(-\sqrt{25}\right)^2+3^0$;

c) $0{,}08\cdot\left(\sqrt{100}\right)^2-5^{-2}$; d) $25:\left(\sqrt{0{,}5}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$;

e) $\sqrt{\sqrt{81}}+\sqrt{\sqrt{9}}$; f) $\sqrt{\sqrt{625}}-\sqrt{\sqrt{4}}$.



47. 1) Apskaičiuokite tikslią x reikšmę.

a) $\sqrt{6}$ m, 1 m, x m b) $2\sqrt{12}$, $\sqrt{8}$, x c) $\sqrt{10}$, $0{,}5\sqrt{80}$, x

2) Apskaičiuokite figūros perimetrą.
3) Apskaičiuokite figūros plotą.

48. Surašykite skaičius didėjimo tvarka.

$1{,}4$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{19}{10}}$; $1{,}2^2$; $2\sqrt{0{,}499}$.

49. Surašykite skaičius mažėjimo tvarka.

$-5\frac{1}{10}$; $-\sqrt{26}$; $-3\sqrt{3}$; $-\sqrt{\frac{249}{10}}$; $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$.

50. Apskaičiuokite kvadrato kraštinės ilgį, kai duotas jo plotas.

a) $6\,\text{m}^2$; b) $35\,\text{m}^2$; c) $120\,\text{m}^2$; d) 5 arai; e) 7 hektarai.

Atsakymą užrašykite metrais šimtųjų tikslumu.

51. Apskaičiuokite tikslią reiškinio reikšmę.

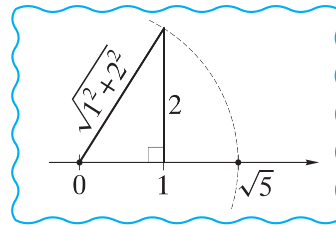
a) $\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}$, kai $x=-2$, $y=-5$;

b) $\sqrt{(2-x)^2+(3-y)^2}$, kai $x=-1$, $y=-2$;

c) $\sqrt{(x-8)^2+(y-1)^2}$, kai $x=10$, $y=-4$;

d) $\sqrt{(5-x)^2+(6-y)^2}$, kai $x=2$, $y=3$.

52. a) Ant skaičių tiesės nubraižę statųjį trikampį, kurio statinių ilgiai lygūs 1 ir 3, pažymėkite skaičių tiesės taškus, atitinkančius skaičius $\sqrt{10}$ ir $-\sqrt{10}$.
b) Ant skaičių tiesės nubraižę statųjį trikampį, pažymėkite skaičių tiesės taškus, atitinkančius skaičius $\sqrt{13}$ ir $-\sqrt{13}$.





53. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.
a) $(3-2\sqrt{5})(3+2\sqrt{5})$; b) $(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{5})(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5})$;
c) $(2\sqrt{7}-0{,}2\sqrt{3})(0{,}2\sqrt{3}+2\sqrt{7})$; d) $(6\sqrt{2}+4\sqrt{3})(4\sqrt{3}-6\sqrt{2})$.

54. Suraskite visus iracionaliuosius skaičius $\sqrt{n}$ (čia n — natūralusis skaičius), kurie skaičių tiesėje yra tarp:
a) 2 ir 3; b) 4 ir 5; c) 7 ir 8; d) $\frac{1}{2}\sqrt{24}$ ir $0{,}25\sqrt{40}$.

55. Iškelkite dauginamąjį prieš šaknies ženklą ir suprastinkite.
a) $\frac{1}{9}\sqrt{108}$; b) $0{,}1\sqrt{180}$; c) $-\frac{3}{8}\sqrt{128}$;
d) $1{,}25\sqrt{320}$; e) $0{,}02\sqrt{300}$; f) $-0{,}05\sqrt{175}$.

56. Įkelkite dauginamąjį po šaknies ženklu.
a) $5\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{5}$; c) $6\sqrt{10}$;
d) $10\sqrt{6}$; e) $8\sqrt{2}$; f) $2\sqrt{8}$.

$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=$
$=\sqrt{12}$

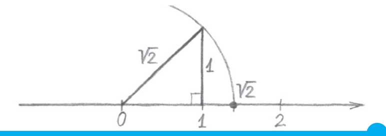


57. Palyginkite reiškinių reikšmes, iškeldami dauginamąjį prieš šaknies ženklą.
a) $4\sqrt{2}$ ir $\sqrt{8}$; b) $5\sqrt{3}$ ir $\sqrt{12}$; c) $\sqrt{20}$ ir $3\sqrt{5}$; d) $2\sqrt{7}$ ir $\sqrt{28}$.

58. Palyginkite reiškinių reikšmes, įkeldami dauginamąjį po šaknies ženklu.
a) $2\sqrt{3}$ ir $\sqrt{10}$; b) $10\sqrt{5}$ ir $\sqrt{550}$; c) $\sqrt{170}$ ir $5\sqrt{6}$; d) $\sqrt{216}$ ir $6\sqrt{6}$.

59. Suprastinkite reiškinį.
a) $2\sqrt{3}+7\sqrt{3}-\sqrt{2}$; b) $\sqrt{20}-\sqrt{75}+\sqrt{48}$;
c) $\sqrt{32}+\sqrt{50}-\sqrt{18}$; d) $2\sqrt{27}-3\sqrt{75}-\sqrt{10}$;
e) $\frac{1}{2}\sqrt{200}-\sqrt{162}+(\sqrt{7})^2$; f) $(2\sqrt{3})^2-\frac{1}{9}\sqrt{63}+\frac{3}{4}\sqrt{112}$.

60. Suprastinkite reiškinį.
a) $\sqrt{10}+2\sqrt{10}-4\sqrt{10}$; b) $\sqrt{5}-\sqrt{20}+2\sqrt{80}$;
c) $\sqrt{27}-\sqrt{243}+13\sqrt{3}$; d) $\sqrt{a}+2\sqrt{a}-4\sqrt{a}$;
e) $\sqrt{y}-\sqrt{4y}+\sqrt{\frac{y}{4}}$; f) $\sqrt{0{,}25ab}-\sqrt{2{,}25a}\cdot\sqrt{4b}$.



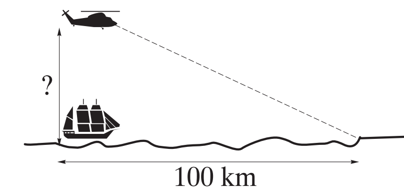
61. Pakelkite kvadratu.
a) $(2+4\sqrt{6})^2$; b) $(\sqrt{5}+\frac{1}{2})^2$; c) $(\sqrt{2}+1{,}5)^2$; d) $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+2\sqrt{1\frac{1}{2}}\right)^2$;
e) $(5-2\sqrt{2})^2$; f) $(0{,}1-10\sqrt{3})^2$; g) $(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{6})^2$; h) $(10\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$.

62. Apskaičiuokite.
a) $\sqrt{0{,}25\cdot 1\frac{7}{9}}$; b) $\sqrt{2\frac{14}{25}\cdot 10\frac{9}{16}}$; c) $\sqrt{5\frac{1}{16}}\cdot(\sqrt{80}-\sqrt{125})$;
d) $(\sqrt{44}+\sqrt{99})\cdot\sqrt{11}$; e) $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}}$; f) $\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{80}}{\sqrt{6}+\sqrt{216}}$;
g) $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{90}}$; h) $\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{5}}:\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$; i) $\frac{\sqrt{0}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

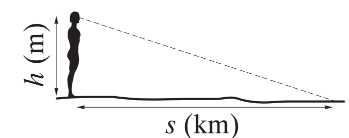
63. Automobilis važiavo keliu, kurio dangos trinties koeficientas lygus 0,5. Koks buvo automobilio greitis prieš staigų stabdymą, jei to stabdymo kelias buvo lygus: a) 15 m? b) 25 m? c) 35 m?
Atsakymą užrašykite km/h vienetų tikslumu.

Žinant automobilio staigaus stabdymo kelio ilgį (atstumą, nuvažiuotą nuo stabdymo pradžios iki sustojimo), galima nustatyti, koks stabdymo pradžios momentu buvo automobilio greitis: $v\approx\sqrt{200\cdot s\cdot\mu}$; čia v — automobilio greitis kilometrais per valandą, s — stabdymo kelio ilgis metrais, μ — kelio dangos trinties koeficientas.

64. Sraigrasparniui pakilus nuo laivo denio, pilotas mato horizonto liniją, kuri nuo laivo nutolusi 100 km atstumu. Kokiame aukštyje yra sraigtasparnis?



Kuo žmogus yra aukščiau virš žemės, tuo toliau esančią horizonto liniją jis gali matyti. Pavyzdžiui, žmogus, kurio ūgis $h=2$ m, lygioje vietovėje mato horizonto liniją, nuo jo nutolusią $s\approx 5$ km atstumu, o 1 m ūgio žmogus mato už maždaug 3,5 km esantį horizontą.



Praktikoje kartais naudojama tokia formulė: $s\approx 3{,}5\sqrt{h}$; čia s — toliausiai matomos horizonto linijos spindulio ilgis kilometrais, h — akies atstumas nuo žemės metrais.

$\sqrt{2}$ — iracionalusis skaičius

Įrodykime, kad skaičiaus $\sqrt{2}$ negalima užrašyti racionaliuoju skaičiumi, t. y. $\sqrt{2}$ nelygu jokiai trupmenai $\frac{a}{b}$, kur a ir b — natūralieji skaičiai.

1) Tarkime priešingai, kad yra tokia trupmena $\frac{a}{b}$, kuri lygi $\sqrt{2}$:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Beje, galime laikyti, kad trupmena $\frac{a}{b}$ yra ***nesuprāstinama***, t. y. tokia trupmena, kurioje a ir b neturi bendrų daliklių (kitaip mes ją suprastintume).

2) Pakelkime abi užrašytos lygybės puses kvadratu:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{b^2} = 2.$$

Gautosios lygybės abi puses padauginkime iš b^2:

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \quad \Big| \cdot b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2b^2.$$

3) Panagrinėkime gautąją lygybę

$$a^2 = 2b^2.$$

Kadangi dešinės pusės reiškinys $2b^2$ dalijasi iš 2, tai ir kairės pusės reiškinys a^2 dalijasi iš 2 (nes tie reiškiniai lygūs). O tai reiškia, kad ir skaičius a dalijasi iš 2 (jei a nesidalytų iš 2, tai ir $a \cdot a$ nesidalytų iš 2).

Pavyzdžiui: $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$ — ir 36, ir 6 dalijasi iš 2.

4) Kadangi a dalijasi iš 2, tai yra toks natūralusis skaičius c, su kuriuo teisinga lygybė:

$$a = 2 \cdot c.$$

5) Į lygybę $a^2 = 2b^2$ vietoj a įrašykime $2c$:

$$(2c)^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad 4c^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2c^2.$$

Gautoji lygybė $b^2 = 2c^2$ rodo, kad ir skaičius b^2, taigi ir b, dalijasi iš 2.

6) Tarę, kad $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, kur a ir b yra natūralieji skaičiai, o trupmena $\frac{a}{b}$ yra nesuprastinama (a ir b neturi bendrų daliklių), įrodėme, kad a dalijasi iš 2 (žr. 3) žingsnį) ir kad b dalijasi iš 2 (žr. 5) žingsnį) ... — ***prieštara!***

7) Vadinasi, $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$, t. y. $\sqrt{2}$ negalima užrašyti racionaliuoju skaičiumi.

UŽDAVINĖLIS. Įrodykite, kad skaičius $\sqrt{3}$ yra iracionalus.

ĮRODYKITE FORMULES. Abi lygybės puses keldami kvadratu, įrodykite formulę:
a) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a, b \geqslant 0)$; b) $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b} \quad (a \geqslant 0,\ b > 0)$.

Kai nebuvo skaičiuotuvų

O kokią vietą realiame gyvenime užima iracionalieji skaičiai, tokie kaip $\sqrt{2}$? Turbūt negirdėjote sakant: „Prašom pasverti $\sqrt{2}$ kg mėsos!“. Bet gali tekti kalbėti apie kvadrato, kurio kraštinė lygi, pvz., 1 m, įstrižainės ilgį (tikslus jos ilgis nusakomas skaičiumi $\sqrt{2}$ m). Realiame gyvenime tokiais skaičiais nepiktnaudžiaujama ... Gyvenime pakanka imti apytiksles iracionaliųjų skaičių reikšmes, kurios suprantamos kiekvienam.
Šiandien tereikia paspausti skaičiuotuvo klavišą ir gauname $\sqrt{2}$ apytikslę reikšmę, kurią suapvaliname iki reikiamo ženklų skaičiaus.
O kaip elgtis neturint skaičiuotuvo ar kompiuterio?
Apskaičiuokime $\sqrt{\mathbf{2}}$ apytikslę dešimtainę reikšmę su trimis ženklais po kablelio.
Žinome, kad

$$1^2 < \mathbf{2}, \quad \text{o} \quad 2^2 > \mathbf{2}, \quad \text{t. y.} \quad 1^2 < \mathbf{2} < 2^2,$$

todėl skaičius $\sqrt{\mathbf{2}}$ yra tarp natūraliųjų skaičių 1 ir 2: $1 < \sqrt{\mathbf{2}} < 2$. Taigi,

$$\sqrt{2} = 1,\ldots$$

Raskime pirmąjį skaitmenį po kablelio. Nuosekliai kelkime kvadratu skaičius 1,1; 1,2 ir t. t, kol gausime daugiau už 2:

$$1{,}1^2 = 1{,}21; \quad 1{,}2^2 = 1{,}44; \quad 1{,}3^2 = 1{,}69; \quad 1{,}4^2 = 1{,}96; \quad 1{,}5^2 = 2{,}25.$$

Kadangi $1{,}5^2 > 2$, tai $1{,}6^2$ jau mūsų nebedomina. Nustatėme, kad $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$. Vadinasi, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Taigi, skaičiaus $\sqrt{2}$ pirmasis tikslus dešimtainis skaitmuo po kablelio yra 4:

$$\sqrt{2} = 1{,}4\ldots$$

Kad rastume antrąjį skaitmenį po kablelio, iš eilės kelkime kvadratu 1,41; 1,42, ... — kol gausime daugiau už 2:

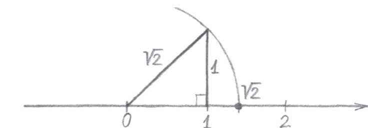
$$1{,}41^2 = 1{,}9881; \quad 1{,}42^2 = 2{,}0164.$$

Nustatėme, kad $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$. Vadinasi, $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. O tai reiškia, kad $\sqrt{2}$ antrasis tikslus dešimtainis skaitmuo po kablelio yra 1:

$$\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$$

Tęsdami šį procesą, skaičiaus $\sqrt{2}$ dešimtainiame užraše galime gauti tiek ženklų po kablelio, kiek mums reikia.
Bet tai, žinoma, reikalauja daug laiko.
Žmogus tam ir sukūrė „protingas“ mašinas, palengvinančias jo gyvenimą.

UŽDAVINĖLIS, kurį spręsdami nesinaudokite skaičiuotuvu ...
1) Tarp kokių natūraliųjų skaičių yra skaičius $\sqrt{3}$?
2) Tarp kokių dešimtainių trupmenų, turinčių vieną skaitmenį po kablelio, yra skaičius $\sqrt{3}$?
3) Tarp kokių dešimtainių trupmenų, turinčių du skaitmenis po kablelio, yra skaičius $\sqrt{3}$?



TESTAS

65. $\sqrt{100} =$
A 10 ir -10 **B** 10 **C** -10 **D** 100

66. $(\sqrt{16})^2 =$
A $\sqrt{16}$ **B** 16^2 **C** 16 **D** -16

67. Reiškinio $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ reikšmė, kai $x = 9$, $y = 4$ lygi:
A 5 **B** 1 **C** $\sqrt{5}$ **D** 13

68. Kas turi būti parašyta vietoj □, kad lygybė $-\sqrt{64} =$ □ būtų teisinga?
A 8 **B** -8 **C** 8 arba -8 **D** -64

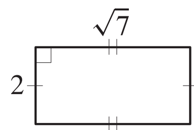
69. $\sqrt{5}$ apytikslė reikšmė šimtųjų tikslumu lygi:
A 2,24 **B** 2,23 **C** 2,236 **D** 2,2

70. $\sqrt{6}$ reikšmė yra tarp
A 1 ir 2 **B** 3 ir 4 **C** 2 ir 3 **D** 5 ir 7

71. $5\sqrt{11} \cdot 3\sqrt{11} =$
A 1815 **B** $15\sqrt{11}$ **C** 225 **D** 165

72. $\sqrt{175} =$
A $7\sqrt{5}$ **B** $7\sqrt{25}$ **C** $5\sqrt{7}$ **D** 175

73. Pavaizduoto stačiakampio plotas lygus:
A $\sqrt{7}$ **B** $4\sqrt{7}$ **C** $7\sqrt{2}$ **D** $2\sqrt{7}$



74. $(3\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) =$
A $9\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$ **B** 9 **C** 5 **D** 33

75. $\sqrt{16 + 25} =$
A 9 **B** $\sqrt{41}$ **C** 41 **D** 5

76. $\sqrt{3^2 + 7^2} =$
A 10 **B** $\sqrt{10}$ **C** $\sqrt{58}$ **D** 5

77. $6\sqrt{5} - \sqrt{5} =$
A $5\sqrt{5}$ **B** $\sqrt{5}$ **C** 6 **D** 30

78. Suprastinę reiškinį $\sqrt{27} + \sqrt{24} - \sqrt{48}$, gauname:
A $7\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ **B** $7\sqrt{6}$ **C** $5\sqrt{3} + \sqrt{6}$ **D** $2\sqrt{6} - \sqrt{3}$

79. Koks ženklas turi būti parašytas vietoj □: $\sqrt{9} + \sqrt{4}$ □ $\sqrt{9+4}$?
A $=$ **B** $<$ **C** $>$ **D** $\geqslant$

80. $(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2 =$
A $\sqrt{2}$ **B** 2 **C** $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ **D** 12

81. $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 =$
A 2 **B** $\sqrt{2}$ **C** $2 - 2\sqrt{35}$ **D** $12 - 2\sqrt{35}$

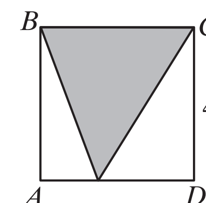
82. $\sqrt{25 \cdot 100} =$
A 500 **B** 250 **C** 50 **D** 15

83. $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$
A 2 **B** 3 **C** $2\sqrt{3}$ **D** $\sqrt{3}$

84. Stačiakampio, kurio matmenys $\sqrt{5}$ cm $\times$ 10 cm, įstrižainė lygi:
A $\sqrt{50}$ cm **B** 105 cm **C** $\sqrt{105}$ cm **D** $(10 + \sqrt{5})$ cm

85. $\sqrt{24} : \sqrt{6} =$
A $6\sqrt{2}$ **B** 2 **C** $2\sqrt{6}$ **D** 4

86. $ABCD$ — kvadratas. Kam lygus nuspalvintos figūros plotas?
A $\frac{\sqrt{12}}{2}$ **B** $\sqrt{20}$ **C** 8 **D** 4



PASITIKRINAME

87. Ar lygybė yra teisinga?

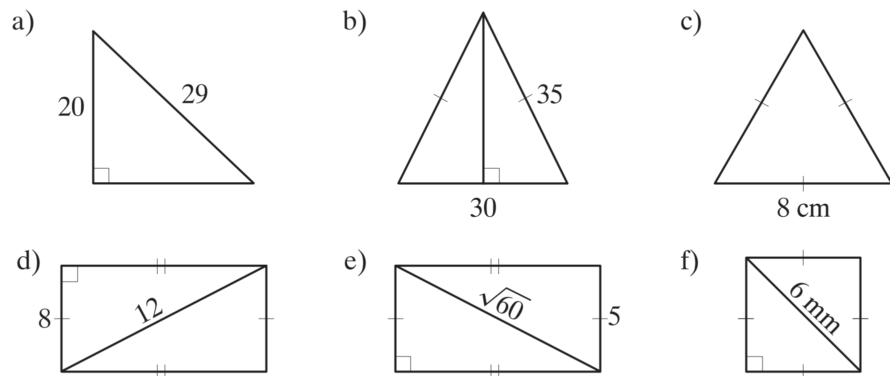
a) $\sqrt{16}=4$; b) $\sqrt{36}=-6$; c) $-\sqrt{1}=-1$; d) $(\sqrt{0})^2=0$.

88. Apskaičiuokite.

a) $\sqrt{25}-\sqrt{64}$; b) $\frac{1}{3}\sqrt{81}-(\sqrt{2})^2$;

c) $(2\sqrt{7})^2\cdot(-\sqrt{5})^2$; d) $2{,}5\sqrt{144}:(\sqrt{6})^2$.

89. Apskaičiuokite pavaizduotos figūros perimetrą ir plotą.



90. Skaičiuotuvu apskaičiuokite kvadratinės šaknies reikšmę.

a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{29}$; c) $\sqrt{105}$; d) $\sqrt{500}$.

Atsakymą pateikite šimtųjų tikslumu.

91. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $(2\sqrt{5})^2-\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}$; b) $3\cdot(-\sqrt{6})^2+0{,}2\cdot(\sqrt{3})^2$; c) $\frac{3\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}{21}$.

92. Apskaičiuokite kvadrato perimetrą P ir įstrižainės ilgį d, kai kvadrato plotas lygus: a) $13\,\text{cm}^2$; b) $20\,\text{cm}^2$; c) $48\,\text{mm}^2$.

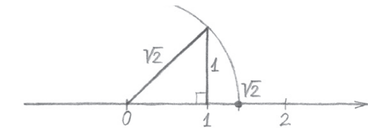
93. Surašykite skaičius didėjimo tvarka.

a) $\sqrt{8}$; $\sqrt{15}$; $-2\sqrt{3}$; $3\sqrt{4}$; $-\sqrt{17}$;

b) $0{,}3$; $\sqrt{\frac{11}{15}}$; $-0{,}1$; $-\sqrt{0{,}3}$; $\sqrt{1\frac{2}{7}}$.

94. Skaičiuotuvu nustatykite apytikslę šaknies reikšmę dešimtųjų tikslumu ir nurodykite jos apytikslę vietą skaičių tiesėje.

a) $\sqrt{11}$; b) $\sqrt{28}$; c) $\sqrt{50}$; d) $-\sqrt{10}$.



95. Apskaičiuokite pritaikę formulę $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

a) $(\sqrt{11}+4)(\sqrt{11}-4)$; b) $(5\sqrt{2}-20)(5\sqrt{2}+20)$;

c) $(\sqrt{5}-2\sqrt{3})(\sqrt{5}+2\sqrt{3})$; d) $(3\sqrt{2}+1)(1-3\sqrt{2})$.

96. Apskaičiuokite pritaikę formulę $(a\pm b)=a^2\pm 2ab+b^2$.

a) $(6-\sqrt{3})^2$; b) $(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2$; c) $(2\sqrt{2}-\sqrt{8})^2$.

97. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $\sqrt{6x+4}$, kai $x=10$; $x=0$; $x=0{,}14$;

b) $3x^2-6$, kai $x=\sqrt{7}$; $x=-\sqrt{10}$; $x=4\sqrt{3}$.

98. Apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$; b) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}$; c) $\sqrt{45}\cdot\sqrt{80}$; d) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$;

e) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; f) $\frac{\sqrt{540}}{\sqrt{15}}$; g) $\sqrt{9\cdot 25}$; h) $\sqrt{7\frac{1}{9}}$.

99. Iškelkite dauginamąjį prieš šaknies ženklą.

a) $\sqrt{1000}$; b) $\sqrt{40}$; c) $\sqrt{135}$; d) $\sqrt{320}$.

100. Suprastinkite.

a) $6\sqrt{3}+4\sqrt{3}+2\sqrt{3}$; b) $9\sqrt{5}+\sqrt{5}-3\sqrt{5}$; c) $\sqrt{11}+4\sqrt{11}-\sqrt{7}$.

101. Atskliauskite.

a) $\sqrt{6}\cdot(4+\sqrt{6})$; b) $2\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+4)$; c) $3\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

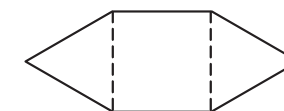
102. Iškelkite dauginamąjį prieš šaknies ženklą ir suprastinkite.

a) $2\sqrt{160}-3\sqrt{40}$; b) $10\sqrt{20}+\sqrt{180}$; c) $\frac{1}{4}\sqrt{48}-\frac{1}{3}\sqrt{27}$.

103. Apskaičiuokite.

a) $\sqrt{144\cdot\frac{81}{100}}$; b) $\sqrt{0{,}04\cdot 4\frac{41}{100}}$; c) $\sqrt{8{,}2^2-1{,}8^2}$; d) $\sqrt{1\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}}$.

104. Geometrinė figūra sudaryta iš kvadrato ir dviejų lygiakraščių trikampių. Kvadrato plotas lygus $36\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite figūros perimetrą ir plotą.



105. Lemputės galia 40 vatų. Jos kaitinimo siūlelio varža 32 omai. Kokiai optimaliai elektros srovės įtampai pritaikyta ši lemputė? Atsakymą (voltais) suapvalinkite iki vienetų.

Kuo elektros srovės įtampa yra didesnė, tuo elektros lemputė šviečia ryškiau. Bet srovės įtampa negali būti per didelė — tada lemputė perdegs. Formulė $U=\sqrt{P\cdot R}$ nusako optimalų ryšį tarp srovės įtampos U (ji matuojama voltais), lemputės galios P (ji matuojama vatais) ir lemputės siūlelio varžos R (ji matuojama omais).

KARTOJAME

106. Kas daugiau:
a) 20% skaičiaus 50 ar 50% skaičiaus 20?
b) 15% skaičiaus 40 ar 40% skaičiaus 15?
c) 22% skaičiaus 33 ar 33% skaičiaus 22?
d) b% skaičiaus a ar a% skaičiaus b?

Ieškodami a% skaičiaus A, skaičių A dalijame iš 100 ir dauginame iš a.

107. Raskite skaičių A, jei žinoma, kad:
a) 20% skaičiaus A lygu 17,5; b) 15% skaičiaus A lygu $22\frac{1}{3}$;
c) 25,5% skaičiaus A lygu 25,5; d) $33\frac{1}{3}$% skaičiaus A lygu $66\frac{2}{3}$.

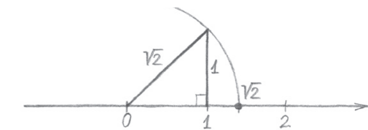
Raskime A, jei 10% skaičiaus A lygu 15.

I būdas.
A — 100%
15 — 10% $\to \frac{A}{100} = \frac{15}{10} \to A = \frac{15 \cdot 100}{10} = 150.$

II būdas.
1% skaičiaus A yra $15 : 10 = 1{,}5$.
Visas skaičius A, t. y. 100% skaičiaus A yra $1{,}5 \cdot 100 = 150$.

108. Kiek procentų skaičiaus A sudaro skaičius b, jei:
a) $A = 100$, $b = 12$? b) $A = 250$, $b = 10$?
c) $A = 72$, $b = 26$? d) $A = 44{,}4$, $b = 2\frac{1}{3}$?

Kiek procentų skaičiaus $A = 300$ sudaro skaičius $b = 7$?
I būdas.
Randame 1% skaičiaus A: $300 : 100 = 3$.
Randame, kiek kartų skaičius 3 telpa skaičiuje 21: $21 : 3 = 7$.
II būdas.
$\frac{21}{300} \cdot 100\% = 7\%$.
III būdas.
300 — 100%
21 — x% $\to \frac{300}{100} = \frac{21}{x} \to x = \frac{21 \cdot 100}{300} \to x = 7(\%)$.
Vadinasi, skaičius $b = 21$ sudaro 7% skaičiaus $A = 300$.

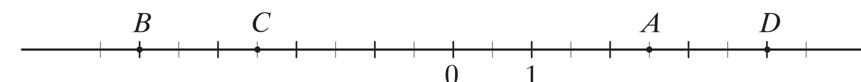


PRISIMENAME TAI, KO PRIREIKS KITAME SKYRIUJE

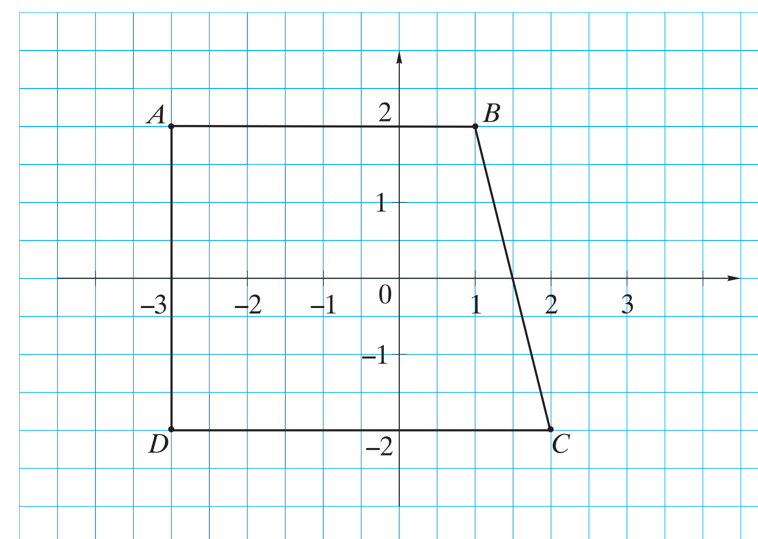
109. Raskite kiekvieno duotojo skaičiaus modulį:
5; 2,3; $4\frac{1}{2}$; 0; -5; $-2{,}3$; $-10\frac{1}{3}$.

$|a| = a$, kai $a \geqslant 0$, $|7| = 7$;
$|a| = -a$, kai $a < 0$, $|-7| = 7$.

110. Raskite skaičių tiesėje sužymėtus taškus atitinkančių skaičių modulius.



111. Koordinačių plokštumoje nubraižytas keturkampis $ABCD$.

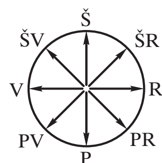


1) Surašykite keturkampio viršūnių koordinates.
2) Koks yra keturkampis $ABCD$?
A Kvadratas **B** Stačiakampis **C** Lygiagretainis **D** Trapecija
3) Apskaičiuokite keturkampio plotą.

112. 1) Nusibraižykite koordinačių plokštumą.
2) Toje plokštumoje nubraižykite:
a) statųjį trikampį ABC;
b) lygiašonį trikampį LMN;
c) kvadratą $OPRS$;
d) lygiašonę trapeciją $KVUZ$.
3) Surašykite jūsų nubraižytų figūrų viršūnių koordinates.

Kiek nuėjo Daiva?

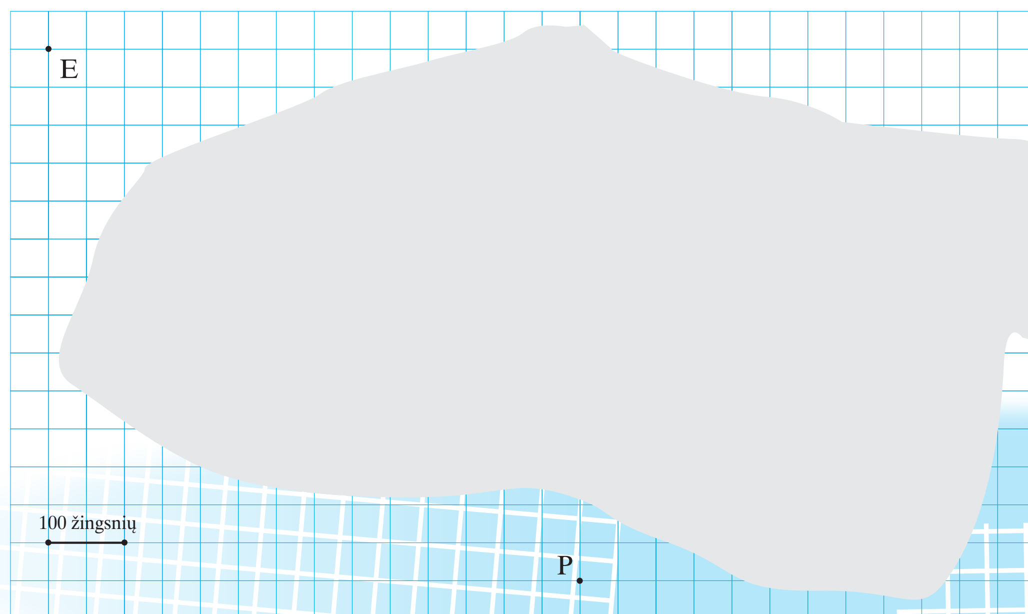
Daiva, pasiėmusi kompasą, išėjo pasivaikščioti į miškelį.



Savo kelionę Daiva pradėjo nuo pavėsinės (P).

- Nuo pavėsinės nuėjusi 400 žingsnių rytų kryptimi →, ji atsidūrė prie elektros stulpo (S).
- Nuo stulpo ji šiaurės kryptimi ↑ nužingsniavo 300 žingsnių ir priėjo laukymę (L).
- Nuo laukymės Daiva pasisuko į šiaurės vakarus ↖ ir užlipo į nedidelį kalniuką (K).
- Nuo kalniuko žiūrint pietų kryptimi ↓, matėsi pavėsinė (P), iš kurios savo žygį pradėjo Daiva.
- Nuo kalniuko keliauninkė nužingsniavo 700 žingsnių į vakarus ← ir priėjo ežerą (E).

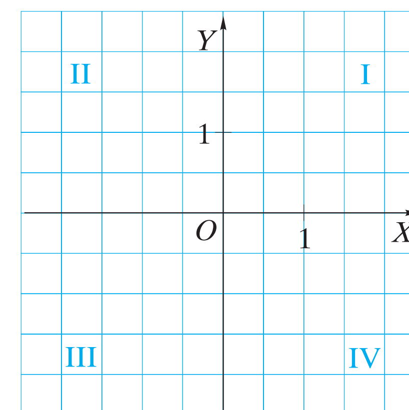
Tada, pasiėmusi popieriaus lapą, ji sužymėjo savo aplankytas vietas ir, nesunkiai nustačiusi kryptį, tiesiausiu keliu grįžo į pavėsinę (P).
Grįžusi Daiva nutarė apskaičiuoti:
1) kokį atstumą (žingsniais) ji nuėjo;
2) kokį atstumą ji būtų nuėjusi, jei būtų ėjusi maršrutu PLEP.



Deja, Daivos lapelis prie ežero sušlapo — dalis žymenų prapuolė.
Pabandykite padėti Daivai.

Atstumas tarp taškų

Šiame skyriuje sužinosime daugiau apie stačiakampę koordinačių plokštumą.

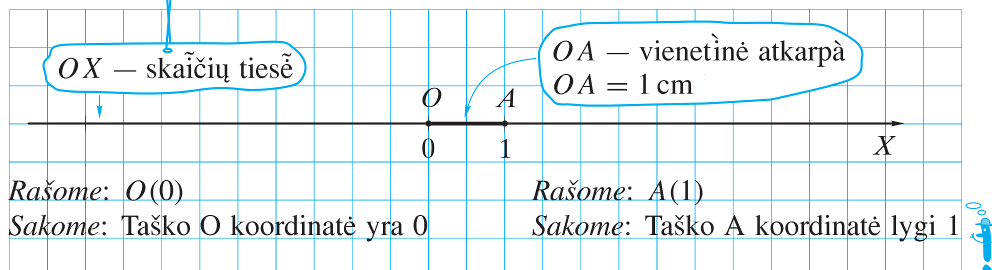




- Prisiminsime, kaip skaičiuojamas atstumas tarp dviejų skaičių tiesės taškų.
- Mokysimės apskaičiuoti atstumą tarp dviejų koordinačių plokštumos taškų.
- Mokysimės apskaičiuoti atkarpos vidurio taško koordinates, kai žinomos atkarpos galų koordinatės.

2.1. ATSTUMAS TARP SKAIČIŲ TIESĖS TAŠKŲ

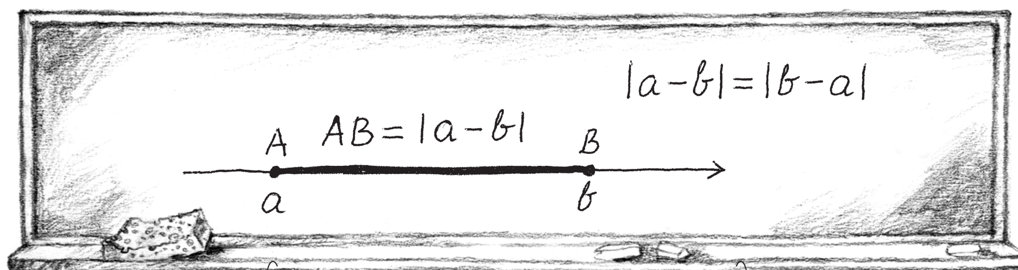
Užduotis. 1) Nubrėžkite skaičių tiesę OX. Vienetinę atkarpą OA pasirinkite lygią dviejų langelių ilgiui.



2) Toje tiesėje pažymėkite taškus $B(3)$ ir $C(-2)$.
3) Kam lygus atstumas tarp koordinačių pradžios taško $O(0)$ ir taško $B(3)$? taško $C(-2)$? $OB = ?$, $OC = ?$.
Raskite taškų $B(3)$ ir $C(-2)$ koordinačių modulius: $|3| = ?$, $|-2| = ?$.
Įsitikinkite, kad teisingos lygybės: $OB = |3|$, $OC = |-2|$.

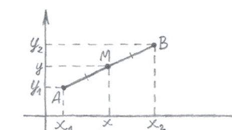
Atstumas nuo skaičių tiesės taško $A(a)$ iki koordinačių pradžios taško $O(0)$ lygus taško A koordinatės a moduliui: $OA = |a|$.

4) Kam lygus atstumas tarp taškų $B(3)$ ir $C(-2)$? $BC = ?$.
Raskite taškų $B(3)$ ir $C(-2)$ koordinačių skirtumų modulius:
$\left|3-(-2)\right| = ?$, $\left|(-2)-3\right| = ?$.
Įsitikinkite, kad atstumas tarp taškų $B(3)$ ir $C(-2)$ yra lygus tų taškų koordinačių skirtumo moduliui:
$BC = \left|3-(-2)\right| = |-2-3|$.

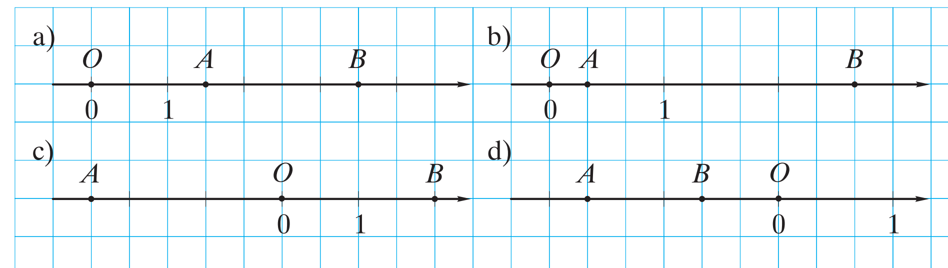


Atstumas tarp dviejų skaičių tiesės taškų lygus tų taškų koordinačių skirtumo moduliui.

Jei skaičių tiesės taškas $B(b)$ yra dešiniau už tašką $A(a)$, t. y. jei $b > a$, tai $AB = b - a$.



113. 1) Užrašykite taškų A ir B koordinates.
2) Kam lygus atstumas OA? atstumas OB?
3) Apskaičiuokite atstumą AB.



114. 1) Nubrėžkite skaičių tiesę, kurios vienetinės atkarpos ilgis lygus 5 sąsiuvinio langelių ilgiui.
2) Toje tiesėje pažymėkite taškus:
$A(1)$, $B(-1)$, $C(2{,}1)$, $D\left(-\frac{3}{5}\right)$, $E(-1{,}9)$, $F\left(\frac{7}{10}\right)$, $G\left(-\frac{3}{4}\right)$.
3) Nustatykite, kam lygus atstumas tarp skaičių tiesės taško $O(0)$ ir kiekvieno pažymėto taško.
4) Apskaičiuokite atstumą tarp taškų:
A ir B; B ir C; A ir D; D ir E; F ir G.

115. Lentelėje surašytos skaičių tiesės taškų $E(e)$ ir $M(m)$ koordinatės (e ir m).

e	m	**A**	**B**	**C**	**D**
0	5	5	2,5	0	−5
−5	4	−9	−1	1	9
3	−5	−2	8	−8	2
−2	−9	11	−7	7	−11
2,2	$-1\frac{1}{3}$	$\frac{13}{15}$	$3\frac{8}{15}$	3,5	$3\frac{3}{10}$

Nustatykite, kuris iš lentelėje surašytų skaičių — **A**, **B**, **C** ar **D** — reiškia atstumą tarp taškų E ir M.

116. a) Skaičių tiesėje pažymėkite tašką $A(3)$. Tada pažymėkite tos tiesės taškus B ir C, nuo taško A nutolusius per 4 vienetines atkarpas. Užrašykite taškų B ir C koordinates. Apskaičiuokite atstumą BC.
b) Skaičių tiesėje pažymėkite tašką $A(-2{,}5)$. Kam lygus atstumas tarp tos skaičių tiesės taškų B ir C, kurie yra vienodai nutolę nuo taško A, kai žinoma, kad $BD = 3$, o taško D koordinatė lygi -1? (Galimi du atvejai.)

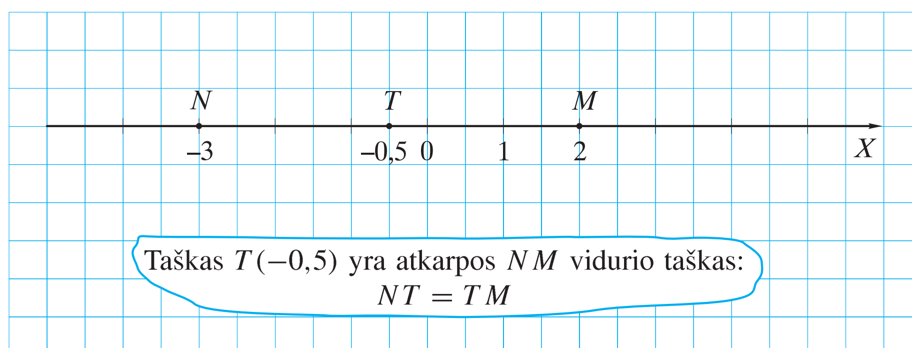
2.2. SKAIČIŲ TIESĖS ATKARPOS VIDURIO TAŠKAS

Užduotis.

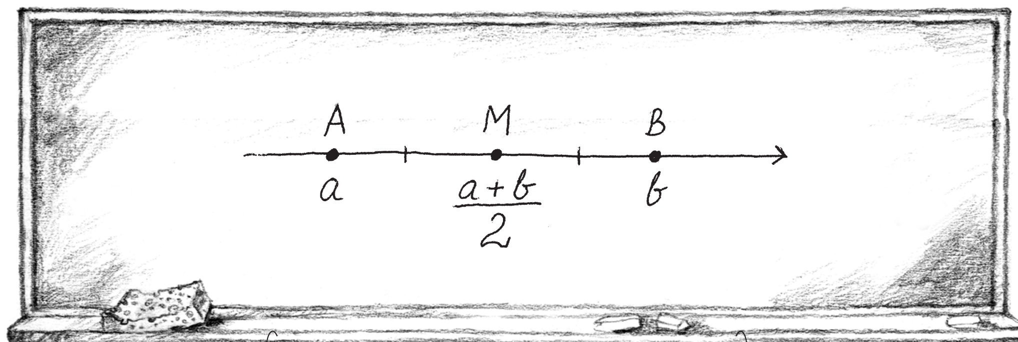
1) Nubrėžkite skaičių tiesę OX su vienetinė atkarpa $OA = 1$ cm.
2) Toje skaičių tiesėje pažymėkite taškus

$$B(4) \quad \text{ir} \quad C(-5).$$

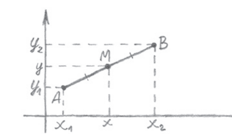
3) Naudodamiesi savo brėžiniu, *nustatykite*:
   atkarpos OB vidurio taško D koordinates;
   atkarpos OC vidurio taško E koordinates;
   atkarpos BC vidurio taško F koordinates.



4) O dabar, naudodamiesi atkarpos vidurio taško koordinatės formule (ji užrašyta lentoje), *apskaičiuokite* atkarpų BC, AB, AC, OC vidurio taškų koordinates.



Skaičių tiesės atkarpos vidurio taško koordinatė lygi tos atkarpos galų koordinačių sumos pusei.

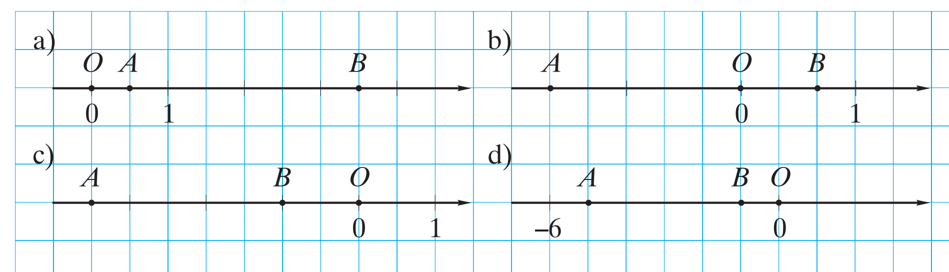


117. Apskaičiuokite skaičių tiesės atkarpos AB vidurio taško M koordinatę, kai žinomos atkarpos AB galų koordinatės.

a) $A(2)$, $B(8)$; b) $A(3)$, $B(-9)$; c) $A(-2)$, $B(-4)$;

d) $A(1{,}3)$, $B(2{,}7)$; e) $A\left(\frac{1}{3}\right)$, $B\left(2\frac{1}{7}\right)$; f) $A(-2{,}1)$, $B(-0{,}2)$.

118. 1) Nustatykite atkarpos AB vidurio taško C koordinatę.
2) Apskaičiuokite atkarpų AB, AC ir CB ilgius.
3) Kam lygi atkarpos OA vidurio taško D koordinatė?



119. Taškas M yra atkarpos AB vidurio taškas. Apskaičiuokite taško A koordinatę, kai:

a) $M(3)$, $B(7)$; b) $M(-3)$, $B(-5)$;

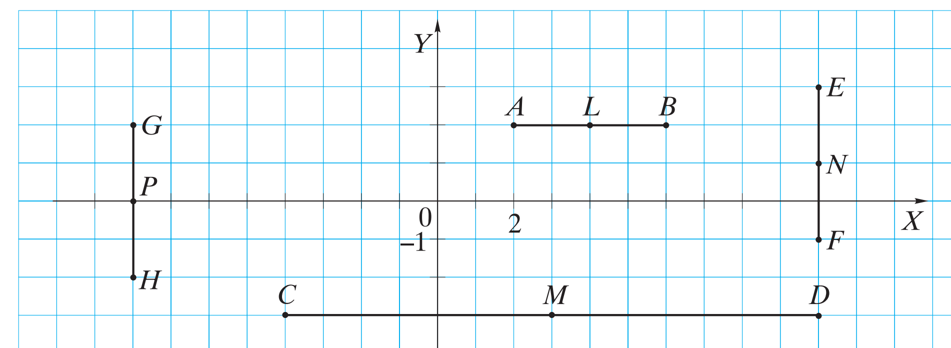
c) $M(1{,}2)$, $B(-4{,}6)$; d) $M\left(\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{4}{9}\right)$.

A M B
a 10 17
$\frac{a+17}{2} = 10 \quad \Big| \cdot 2$
....

120. Skaičių tiesės taškai A ir B yra simetriški taško C atžvilgiu. Apskaičiuokite:

a) taško C koordinatę, kai $A(-2)$, $B(6)$; $A(-100)$, $B(100)$;
b) taško B koordinatę, kai $A(5)$, $C(25)$; $A(12{,}5)$, $C\left(-3\frac{1}{3}\right)$;
c) taško A koordinatę, kai $B(0)$, $C(5)$; $B\left(2\frac{2}{3}\right)$, $C\left(-3\frac{1}{4}\right)$.

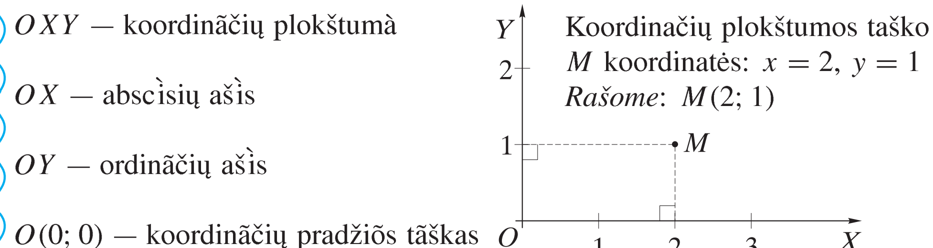
121. Koordinačių plokštumoje nubraižytos atkarpos AB, CD, EF ir GH bei pažymėti jų vidurio taškai L, M, N ir P. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, nustatykite visų tų atkarpų galų ir vidurio taškų koordinates. Apskaičiuokite atkarpų ilgius.



2.3. ATSTUMAS TARP KOORDINAČIŲ PLOKŠTUMOS TAŠKŲ

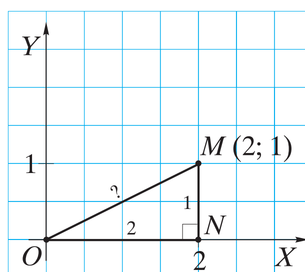
Užduotis.

1) Nubraižykite koordinačių plokštumą. Koordinačių ašių vienetines atkarpas pasirinkite lygias 1 cm.

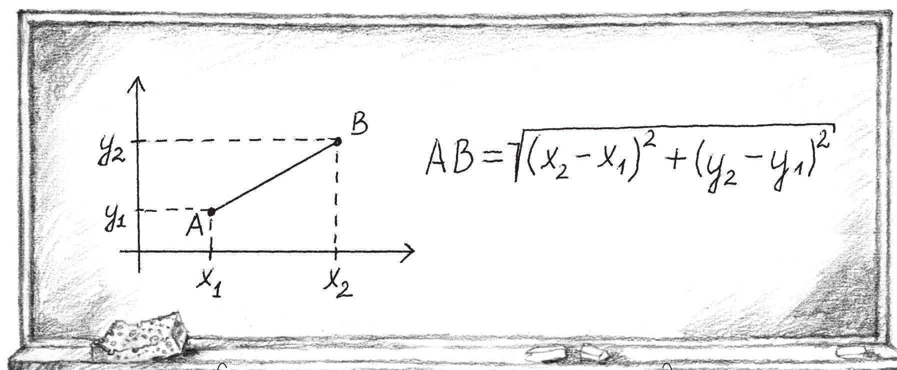


2) Toje koordinačių plokštumoje pažymėkite taškus $A(-2; 1)$, $B(3; 4)$.
3) *Apskaičiuokite* atstumus tarp taškų O ir A; O ir B.

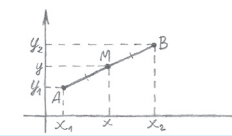
Apskaičiuokime OM, kai $O(0; 0)$, $M(2; 1)$.
1) Nubraižome statųjį trikampį OMN.
2) Randame statinio ON ilgį: $ON = 2$.
3) Randame statinio NM ilgį: $NM = 1$.
4) Naudojamės Pitagoro teorema:
$OM^2 = ON^2 + NM^2$,
$OM^2 = 2^2 + 1^2$, $OM^2 = 4 + 1$, $OM^2 = 5$.
Lygtis $OM^2 = 5$ turi du sprendinius:
$OM = -\sqrt{5}$ ir $OM = \sqrt{5}$.
Bet sprendinys $OM = -\sqrt{5}$ netinka, nes atstumas negali būti lygus neigiamam skaičiui. Vadinasi, $OM = \sqrt{5}$.



4) Naudodamiesi atstumo tarp dviejų koordinačių plokštumos taškų formule (ji užrašyta lentoje), *apskaičiuokite* atstumą tarp taškų $A(-2; 1)$ ir $B(3; 4)$.



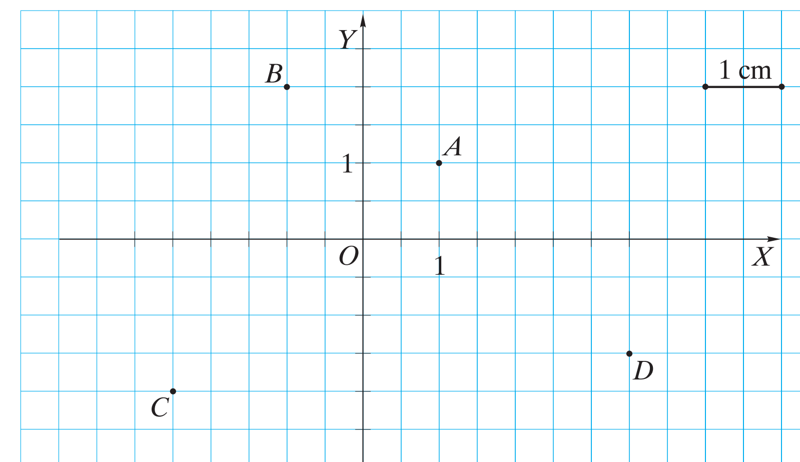
Atstumas tarp dviejų koordinačių plokštumos taškų lygus kvadratinei šaknei iš tų taškų atitinkamų koordinačių skirtumų kvadratų sumos.



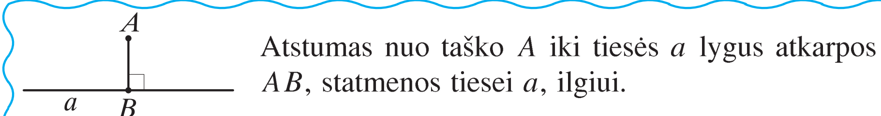
122. Apskaičiuokite atstumą nuo koordinačių plokštumos taško M iki koordinačių pradžios taško O.
a) $M(12; 5)$; b) $M(-3; 4)$; c) $M(15; -8)$; d) $M(-6; -8)$.

123. Apskaičiuokite atstumą tarp koordinačių plokštumos taškų:
a) $M(2; 2)$ ir $N(5; 6)$; b) $M(2; 2)$ ir $K(-5; 2)$;
c) $A(7; 0)$ ir $B(-5; 5)$; d) $P(1; 7)$ ir $L(7; 3)$.

124. Koordinačių plokštumoje pažymėti taškai A, B, C ir D.



1) Apskaičiuokite atstumus milimetrais nuo koordinačių pradžios taško $O(0; 0)$ iki pažymėtųjų taškų.
2) Apskaičiuokite atkarpų AB, BC, CD, DA, BD ir AC ilgius centimetrais.
3) Nustatykite atstumus nuo pažymėtų taškų iki: a) OX; b) OY ašies.



125. Duotos trys kvadrato $ABCD$ viršūnės:
a) $A(1; 2)$, $B(4; 2)$, $C(4; 5)$; b) $A(2; 2)$, $B(2; 6)$, $C(6; 6)$.
Raskite viršūnės D koordinates ir nubraižykite tą kvadratą.

126. Trikampio viršūnių koordinatės yra $A(-1; -1)$, $B(-5; -1)$, $C(-3; -4)$. Ar šis trikampis yra status? Ar šis trikampis yra lygiašonis?

- Jei trikampio kraštinių ilgiai a, b, c susieti viena iš lygybių $a^2 + b^2 = c^2$, $a^2 + c^2 = b^2$, $b^2 + c^2 = a^2$, tai tas trikampis yra *status*.
- Trikampis, kurio dvi kraštinės yra lygios, vadinamas *lygiašoniu*.

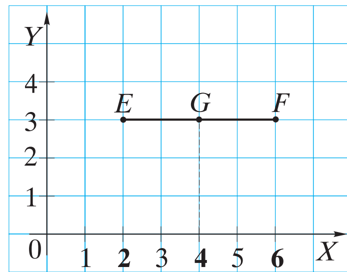
2.4. KOORDINAČIŲ PLOKŠTUMOS ATKARPOS VIDURIO TAŠKAS

Užduotis.

1) Koordinačių plokštumoje pažymėkite taškus

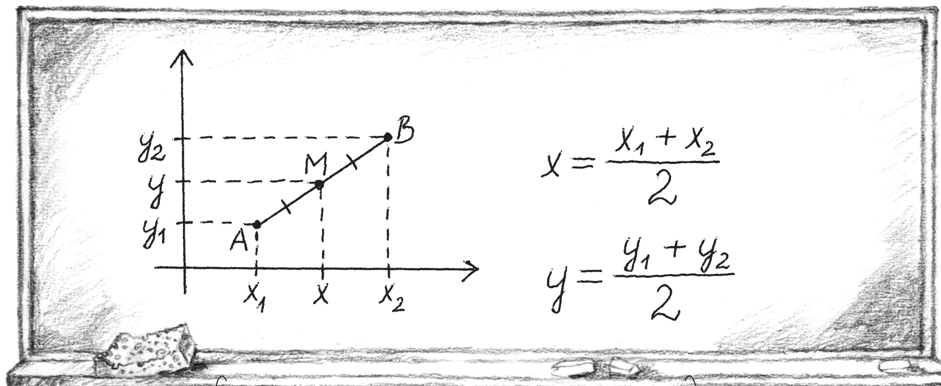
$A(1;\,2),\quad B(1;\,4)\quad \text{ir}\quad C(6;\,2).$

2) Naudodamiesi savo brėžiniu, *nustatykite*:
atkarpos AB vidurio taško M koordinates;
atkarpos AC vidurio taško K koordinates.

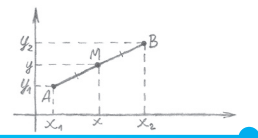


$E(2;\,3)$, $F(6;\,3)$ ← atkarpos EF galų koordinatės
$EF \parallel OX$ ← atkarpa EF lygiagreti ašiai OX
$EG = GF$ ← G yra atkarpos EF vidurio taškas
$G\left(\frac{6+2}{2};\,3\right)$ ← atkarpos EF vidurio taško koordinatės

3) Naudodamiesi lentoje parašytomis formulėmis, *apskaičiuokite* atkarpos BC vidurio taško L koordinates.



Koordinačių plokštumos atkarpos vidurio taško kiekviena koordinatė yra lygi tos atkarpos galų atitinkamų koordinačių sumos pusei.

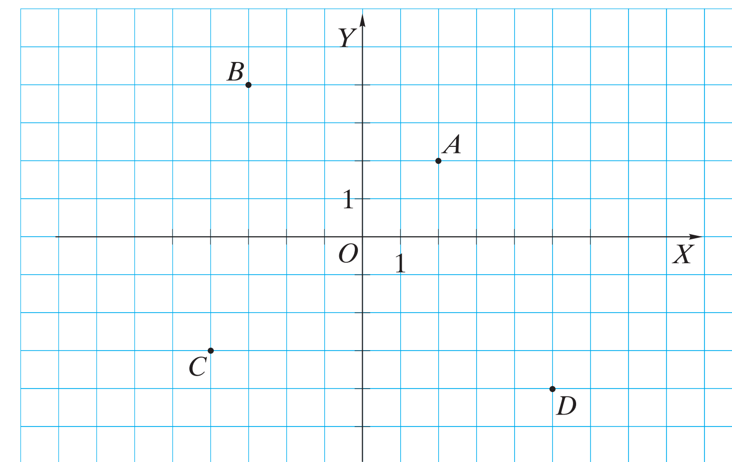


127. Koordinačių plokštumoje nubrėžkite atkarpą, kurios galai yra duotieji taškai.
a) $A(0;\,0)$, $B(8;\,6)$; b) $C(-6;\,5)$, $D(-2;\,1)$;
c) $K(-2;\,-1)$, $N(4;\,3)$; d) $P(3;\,-5)$, $L(-3;\,1)$.
Apskaičiuokite tos atkarpos vidurio taško M koordinates ir pažymėkite jį brėžinyje.

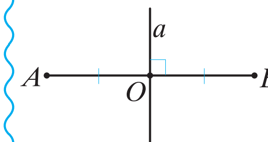
128. Taškas C yra atkarpos AB vidurio taškas. Apskaičiuokite taško B koordinates, kai:
a) $A(-3;\,-6)$, $C(-1;\,4)$; b) $A(3;\,-2)$, $C(-5;\,0)$.

129. Koordinačių plokštumos taškai A ir A_1 yra simetriški taško B atžvilgiu. Apskaičiuokite taško A koordinates, kai $B(2;\,3)$ ir $A_1(7;\,12)$.

130. Koordinačių plokštumoje pažymėti taškai A, B, C ir D.



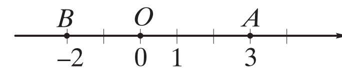
1) Nustatykite tų taškų koordinates.
2) Nustatykite koordinates taškų, kurie yra simetriški pažymėtiems taškams:
a) tiesės OX; b) tiesės OY; c) taško $O(0;\,0)$ atžvilgiu.



- Taškai A ir B yra simetriški tiesės a atžvilgiu, nes $AB \perp a$, $AO = OB$.
- Taškai A ir B yra simetriški taško O atžvilgiu, nes A, O ir B yra vienoje tiesėje ir $AO = OB$.

APIBENDRINAME

Taško padėtis skaičių tiesėje nusakoma vienu skaičiumi, vadinamu to tãško koordinatė.



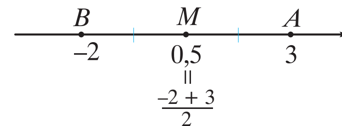
Taško koordinatės modulis lygus to taško atstumui nuo 0 atitinkančio taško.

$A(3)$, $OA = |3| = 3$
$B(-2)$, $OB = |-2| = 2$

Atstumas tarp dviejų skaičių tiesės taškų $A(a)$ ir $B(b)$ lygus tų taškų koordinačių skirtumo moduliui:
$AB = |a - b| = |b - a|$.
(Kai žinoma, kad $a > b$, tai $AB = a - b$.)

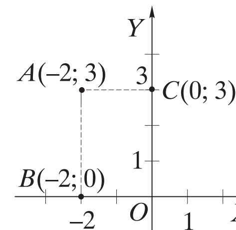
$AB = \big|3 - (-2)\big| = |5| = 5$
$AB = |-2 - 3| = |-5| = 5$
$AB = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$

Atkarpos AB, esančios skaičių tiesėje, vidurio taško M koordinatė m yra lygi tos atkarpos galų $A(a)$ ir $B(b)$ koordinačių sumos pusei: $m = \frac{a+b}{2}$.

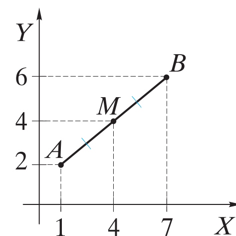


Taško padėtis koordinačių plokštumoje nusakoma skaičių pora $(x; y)$. Tie skaičiai vadinami tãško koordinãtėmis:
x — abscìsė, y — ordinãtė.

Taškų, kurie priklauso abscisių ašiai (OX), ordinatės lygios 0. Taškų, kurie priklauso ordinačių ašiai (OY), abscisės lygios 0.



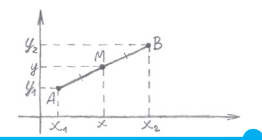
Atstumas tarp koordinačių plokštumos dviejų taškų $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$ lygus kvadratinei šakniai iš tų taškų atitinkamų koordinačių skirtumų kvadratų sumos:
$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



$AB = \sqrt{(7-1)^2 + (6-2)^2} =$
$= \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$;

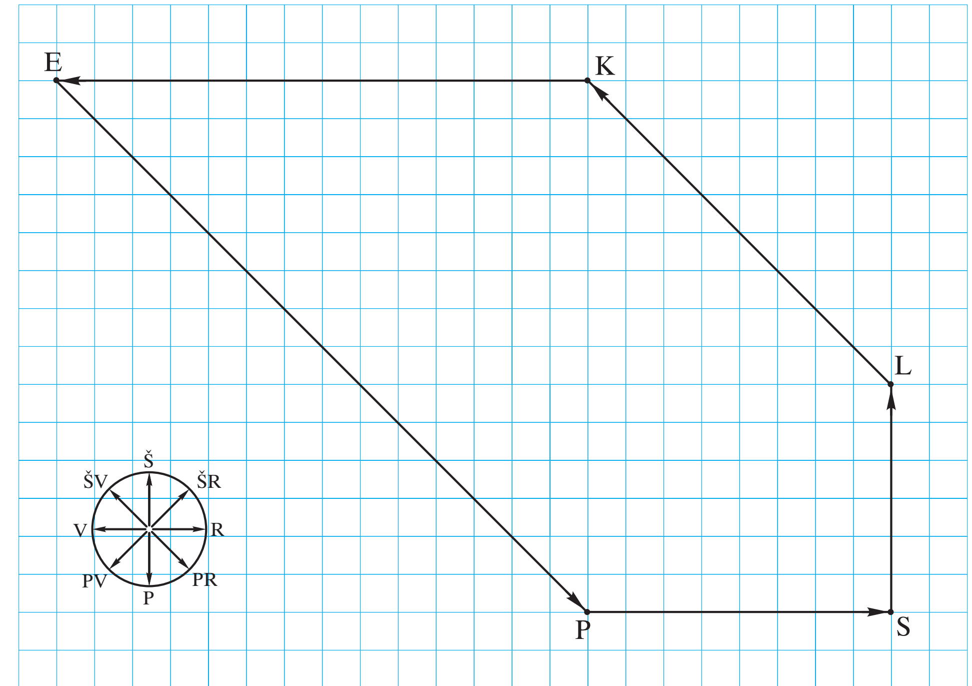
Koordinačių plokštumoje esančios atkarpos AB, kurios $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$, vidurio taško $M(x; y)$ koordinatės lygios tos atkarpos galų atitinkamų koordinačių sumos pusei (aritmetiniam vidurkiui):
$x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

$M\left(\frac{1+7}{2}; \frac{2+6}{2}\right) = M(4; 4)$.



Daivos pasivaikščiojimas

Prisiminkime Daivos pasivaikščiojimą, aprašytą 38 puslapyje.



Pavaizduokite maršrutą PSLKEP koordinačių plokštumoje, kurios ašyse 1 cm atitiktų 100 žingsnių.

1) Pavėsinę (P) pažymėkite koordinačių plokštumos pradžios taške.
   Užrašykite taško P koordinates.
2) Pažymėkite tašką S, atitinkantį stulpo vietą.
   Užrašykite taško S koordinates.
3) Pažymėkite tašką L (laukymę) ir užrašykite jo koordinates.
4) Pažymėkite tašką K (kalniuką).
   Koks kampo SLK dydis?
   Nustatykite taško K koordinates ir apskaičiuokite atstumą LK.
5) Pažymėkite ežerą atitinkantį tašką E.
   Kokios taško E koordinatės?
6) Apskaičiuokite atstumą EP.
7) Apskaičiuokite maršrutų PSLKEP ir PLEP ilgius.
8) Apskaičiuokite atkarpų PS, SL, LK, KE ir EP vidurio taškų koordinates.

SPRENDŽIAME

131. Skaičių tiesėje pažymėkite taškus $A(2)$, $B(-3)$, $C(5{,}5)$ ir $D(-1{,}5)$.
1) Apskaičiuokite atstumą tarp taškų:
a) A ir B; b) A ir C; c) B ir C; d) C ir D.
2) Apskaičiuokite nurodytos atkarpos vidurio taško koordinatę.
a) AO; b) BO; c) CO; d) AB; e) BC; f) BD.

132. Koordinačių plokštumoje pažymėkite taškus $A(1; 2)$, $B(-2; 1)$, $C(3; 0)$, $D(-1; 0)$, $E(-1; -3)$, $F(2; -1)$. Tarp kurių dviejų pažymėtųjų taškų atstumas yra didžiausias?

133. Tiesėje, lygiagrečioje OX ašiai, pažymėti du taškai. Vieno iš tų taškų ordinatė y lygi 3. Pasakykite kito taško ordinatę.

134. Tiesėje, statmenoje OX ašiai, pažymėti du taškai. Vieno iš tų taškų abscisė x lygi -2. Pasakykite kito taško abscisę.

135. Apskaičiuokite atstumą nuo kiekvieno iš taškų $A(4; -3)$, $B(3; 5)$, $C(-1; 4)$, $D(0; 5)$ ir $E(-2; 0)$ iki:
a) OX ašies; b) OY ašies.

136. Raskite lygiagretainio $EFGH$ viršūnės H koordinates ir apskaičiuokite lygiagretainio kraštinių ilgius, kai:
$E(0; 0)$, $F(5; 0)$, $G(12; -3)$.

137. Dvi kvadrato $ABCD$ viršūnės yra taškuose $A(-3; 7)$ ir $B(-3; -1)$. Raskite kvadrato kitų dviejų viršūnių koordinates. Kiek tokių kvadratų yra?

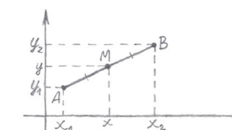
138. Apskaičiuokite atstumą nuo koordinačių pradžios taško iki taško:
a) $A(3; 4)$; b) $B(-5; 12)$; c) $C(4; -3)$; d) $D(-2; -6)$.

139. Apskaičiuokite atstumą tarp taškų:
a) $A(2; 7)$ ir $B(-2; 7)$; b) $A(-5; 1)$ ir $B(-5; -7)$;
c) $A(-3; 0)$ ir $B(0; 4)$; d) $A(0; 3)$ ir $B(-4; 0)$.

140. Trikampio viršūnės yra taškuose $A(-3; -1)$, $B(1; -1)$, $C(1; -3)$. Įrodykite, kad trikampis ABC yra status.

141. Atkarpos CD galų koordinatės yra $C(4; 0)$ ir $D(0; -4)$. Raskite šios atkarpos vidurio taško M koordinates.

142. Taškas C yra atkarpos AB vidurio taškas. Raskite taško B koordinates, kai $A(1; -1)$, $C(2; -2)$.



143. Taškas M yra atkarpos AB, esančios koordinačių plokštumoje, vidurio taškas. Užpildykite tuščius lentelės langelius, taikydami formules atkarpos vidurio taško koordinatėms apskaičiuoti.

A	$(-3; 7)$		$(0; 1)$	$(2; -3)$	$(k; l)$
B	$(0; 0)$	$(4; 7)$		$(-3; 1)$	
M		$(3; 2)$	$(3; -5)$		$(m; n)$

144. Duotos lygiagretainio $ABCD$ viršūnės $A(1; 0)$, $B(2; 4)$, $C(1; 5)$.
1) Raskite viršūnės D koordinates.
2) Raskite įstrižainių susikirtimo taško M koordinates.

Lygiagretainio įstrižainės susikirsdamos viena kitą dalija pusiau.

145. Įrodykite, kad trikampis EFG yra lygiašonis, ir apskaičiuokite jo plotą, kai žinomos trikampio viršūnių koordinatės $E(0; 1)$, $F(1; -4)$, $G(5; 2)$.

146. Koordinačių plokštumoje pažymėti taškai $A(2009; 2010)$, $B(2010; 2009)$, $C(-2009; -2010)$, $D(2009; -2010)$ ir $E(2010; -2009)$. Kuri atkarpa yra horizontali?

A AD **B** BE **C** BC **D** CD **E** AB

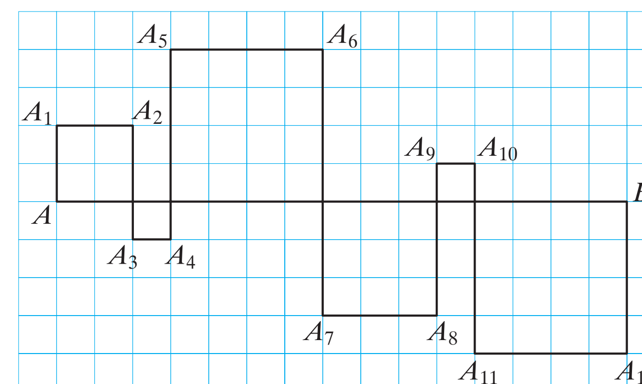


147. Robotas pradeda judėti lentelės langeliais iš langelio A2 rodyklės kryptimi. Robotas juda tiesiai, kol sutinka kliūtį — nuspalvintą lentelės langelį arba lentelės kraštą. Kiekvieną kartą, sutikęs kliūtį, robotas pasuka į dešinę. Robotas sustoja, kai kliūtį sutinka ir priekyje, ir dešinėje. Kuriame langelyje robotas sustos?

A B2 **B** A1 **C** B1 **D** D1 **E** Jis niekada nesustos

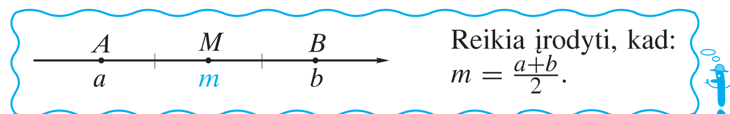


148. Laužtė $AA_1...A_{12}B$ kartu su atkarpa AB sudaro kvadratus (žr. pav.). Raskite laužtės $AA_1...A_{12}B$ ilgį, jei $AB = 15$ cm.



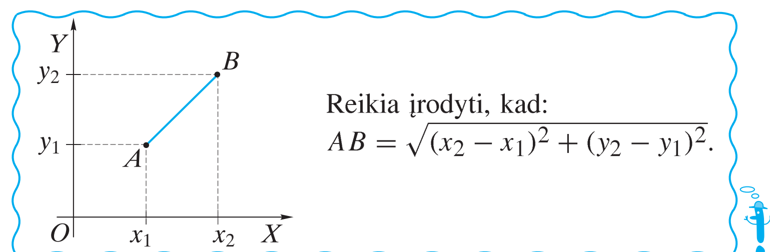
Įrodykime formules

1. Naudodamiesi paveikslėliu įrodykime, kad: *Skaičių tiesės atkarpos vidurio taško koordinatė lygi tos atkarpos galų koordinačių sumos pusei.*

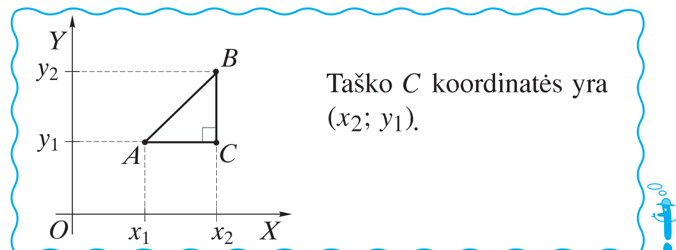


Duota: $A(a)$, $B(b)$, $AM = MB$, $M(m)$.
Įrodyti: $m = \frac{a+b}{2}$.
Įrodymas.
1) Raskime AM ilgį: $AM = m - a$.
2) Raskime MB ilgį: $MB = b - m$.
3) Kadangi $AM = MB$, tai teisinga lygybė: $m - a = b - m$.
4) Iš gautosios lygybės turime: $m + m = b + a$.
Pabaikite įrodymą.

2. Naudodamiesi paveikslėliu įrodykime, kad: *Atstumas tarp dviejų koordinačių plokštumos taškų lygus kvadratinei šakniai iš tų taškų atitinkamų koordinačių skirtumų kvadratų sumos.*



Duota: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.
Įrodyti: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
Įrodymas.
1) Papildykime brėžinį. Sukonstruokime statų trikampį ABC ($\angle C = 90°$).



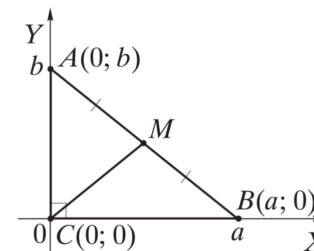
2) Raskime statinio AC ilgį: $AC = x_2 - x_1$.
3) Raskime statinio BC ilgį: $BC = y_2 - y_1$.
4) Naudokimės Pitagoro teorema: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
Pabaikite įrodymą.

Koordinačių metodas

Yra uždavinių, kuriuos sprendžiant „gelbsti“ koordinačių plokštuma.

UŽDAVINYS. *Įrodykime, kad stačiojo trikampio įžambinės vidurio taškas yra vienodai nutolęs nuo visų trijų jo viršūnių.*

Sprendimas. Nagrinėkime statųjį trikampį ABC ($\angle C = 90°$). Įžambinės AB vidurio tašką pažymėkime raide M. Tą statų trikampį „padėkime“ koordinačių plokštumoje taip, kaip parodyta dešinėje. Tarkime, kad statinių ilgiai yra $BC = a$, $AC = b$. Tada trikampio viršūnių koordinatės tokios: $C(0; 0)$, $B(a; 0)$, $A(0; b)$. Pagal atkarpos vidurio taško koordinačių formulę randame taško M koordinates: $M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$.



Taikydami atstumo tarp dviejų taškų formulę, užrašykime, kam lygūs atkarpų MA ir MC ilgiai:

$$MA = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2}, \qquad MC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Įsitikinkime, kad $MA = MC$, t. y.:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

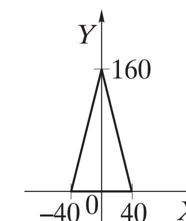
Kadangi pošakniuose esantys pirmieji dėmenys yra vienodi $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, tai lieka įsitikinti, kad ir antrieji dėmenys lygūs, t. y.

$$\left(\frac{b}{2} - b\right)^2 \stackrel{?}{=} \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{b}{2} - \frac{2b}{2}\right)^2 \stackrel{?}{=} \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{b - 2b}{2}\right)^2 \stackrel{?}{=} \left(\frac{b}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{-b}{2}\right)^2 \stackrel{?}{=} \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \text{ — lygybė teisinga.}$$

Vadinasi, $MA = MC$, taip pat ir $MA = MB = MC$. Tą ir reikėjo įrodyti.

Uždaviniai

1. Lygiašonio trikampio pagrindo ilgis lygus 80 cm, o į tą pagrindą nubrėžtos pusiaukraštinės ilgis yra 160 cm. Apskaičiuokite kitų dviejų to trikampio pusiaukraštinių ilgius.



2. Trikampio aukštinė, kurios ilgis 5 cm, trikampio kraštinę dalija į 5 cm ir 2 cm ilgio atkarpas. Apskaičiuokite ilgį pusiaukraštinės, nubrėžtos į trumpesniąją iš kitų dviejų trikampio kraštinių.

3. Dvi trikampio kraštinės lygios 17 cm ir 28 cm. Į ilgesniąją iš tų kraštinių nubrėžtos aukštinės ilgis lygus 15 cm. Apskaičiuokite trikampio pusiaukraštinių ilgius.

TESTAS

149. Skaičių tiesėje į kairę nuo taško $C(4)$ yra taškai, kurie atitinka natūraliuosius skaičius:

A ...-1; 0; 1; 2; 3 **B** 1; 2; 3 **C** 1; 2; 3; 4 **D** 5; 6; 7; ...

150. Atstumas tarp dviejų skaičių tiesės taškų lygus tų taškų koordinačių...

A skirtumui
B sumos pusei
C skirtumo moduliui
D modulių skirtumui

151. Kai $A(-5)$ ir $B(2)$, tai atstumas AB yra lygus:

A 3 **B** -7 **C** -3 **D** 7

152. Kuriame koordinačių plokštumos ketvirtyje yra taškas $K(3; -4{,}7)$?

A I **B** II **C** III **D** IV

153. Taško $(-2; 3)$ atstumas nuo OX ašies lygus:

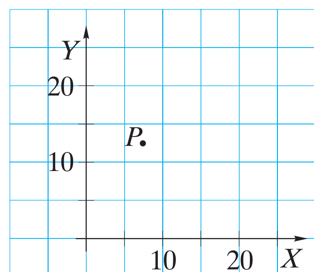
A $\sqrt{13}$ **B** 2 **C** 3 **D** -2

154. Taško $(-2; 3)$ atstumas nuo OY ašies lygus:

A 3 **B** -2 **C** 1 **D** 2

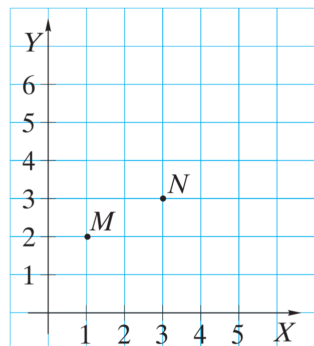
155. Taško P koordinatės yra:

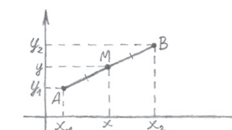
A (8; 12) **B** (8; 8)
C (12; 8) **D** (12; 12)



156. Tiesei MN priklauso taškas:

A (1; 1) **B** (3; 1)
C (4; 4) **D** (5; 4)





157. Jei dvi kvadrato gretimos viršūnės yra taškuose (1; 0) ir (1; 3), tai kitos dvi viršūnės gali būti taškuose:

A $(-2; 3)$ ir $(-2; 0)$
B (4; 3) ir (4; 0)
C $(-2; 3)$ ir $(-2; 0)$ arba (4; 3) ir (4; 0)
D (0; 4) ir (3; 4)

158. Atstumas tarp dviejų koordinačių plokštumos taškų $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$ skaičiuojamas pagal formulę:

A $AB = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$
B $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
C $AB = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
D $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$

159. Atstumas tarp taškų (0; 3) ir (4; 0) lygus:

A 25 **B** 5 ir -5 **C** 5 **D** 1

160. Koordinačių plokštumos atkarpos vidurio taško koordinatės yra lygios

A atkarpos galų koordinačių sumos pusei
B atkarpos galų koordinačių skirtumo moduliui
C atkarpos galų koordinačių skirtumo pusei
D teisingo atsakymo nėra

161. Jei $A(6; -8)$ ir $O(0; 0)$, tai atkarpos AO vidurio taško koordinatės yra:

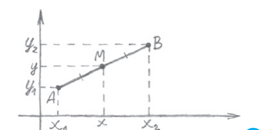
A (10; 0) **B** $(3; -4)$ **C** (3; 4) **D** $(-3; 4)$

162. Taškas C yra atkarpos AB vidurio taškas, $A\left(-10\sqrt{3}\right)$, $B\left(-\sqrt{3}\right)$. Taško C koordinatė lygi:

A -5 **B** $\frac{-11\sqrt{3}}{2}$ **C** $-11\sqrt{3}$ **D** $-5\sqrt{3}$

163. Taškai A ir A_1 yra simetriški taško M atžvilgiu, $A(4)$, $M\left(\sqrt{2}\right)$. Taško A_1 koordinatė lygi:

A 0 **B** -2 **C** $2\sqrt{2} - 4$ **D** $-2\sqrt{2}$



PASITIKRINAME

164. Skaičių tiesėje pažymėkite taškus $A(2)$, $B(-3)$, $C(3{,}5)$ ir $D(-1{,}5)$. Apskaičiuokite atstumą tarp taškų:
a) A ir B; b) A ir C; c) B ir C; d) C ir D.

165. Apskaičiuokite skaičių tiesės atkarpos vidurio taško M koordinatę, kai žinomos tos atkarpos galų koordinatės:
a) $A(2)$, $B(8)$; b) $P(-2)$, $T(6)$; c) $K(1{,}5)$, $L(5{,}5)$.

166. Dvi kvadrato $ABCD$ gretimos viršūnės yra taškuose $A(7; 3)$ ir $B(-1; 3)$. Raskite kitų dviejų viršūnių koordinates. (Galimi du atsakymai.)

167. Apskaičiuokite atstumą nuo koordinačių pradžios taško O iki taško:
a) $A(3; 4)$; b) $B(-5; 12)$; c) $C(4; -3)$; d) $D(-2; -6)$.

168. Apskaičiuokite atstumą tarp taškų:
a) $A(2; 7)$ ir $B(-2; 7)$; b) $A(-5; 1)$ ir $B(-5; -7)$;
c) $A(-3; 0)$ ir $B(0; 4)$; d) $A(0; 2)$ ir $B(-4; 0)$.

169. Trikampio viršūnės yra taškuose $A(4; 1)$, $B(3; 5)$, $C(-1; 4)$.
1) Apskaičiuokite trikampio kraštinių ilgius.
2) Apskaičiuokite trikampio perimetrą.
3) Įrodykite, kad trikampis yra status.

170. Koordinačių plokštumoje pažymėkite tašką $M(-3; 2)$ ir tašką, jam simetrišką:
a) OX ašies atžvilgiu; b) OY ašies atžvilgiu;
c) koordinačių pradžios taško $O(0; 0)$ atžvilgiu.
Užrašykite gautojo taško koordinates.

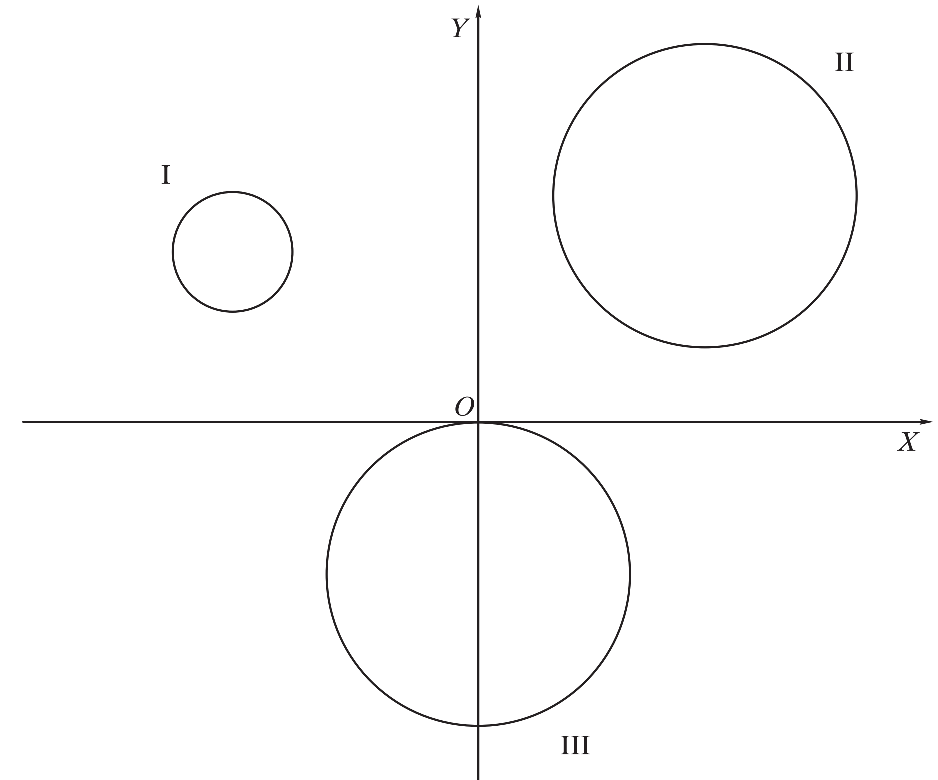
171. Kaip išsidėstę koordinačių plokštumoje taškai, kurių:
a) abscisės lygios 5? b) ordinatės lygios -2?

172. a) Kuris iš taškų $E(-1; 3)$, $F(3; -2)$, $G(2; -3)$, $H(4; 5)$ yra arčiausiai OX ašies?
b) Kurie iš taškų $M(-3; 2)$, $N(3; 4)$, $K(-4; -3)$, $L(5; 4)$ nuo OY ašies nutolę tiek pat, kaip ir taškas $A(-3; 4)$?

173. Taškai A ir A_1 yra simetriški taško B atžvilgiu. Apskaičiuokite:
a) taško A_1 koordinatę, kai $A(4)$ ir $B(-1)$;
b) taško A koordinates, kai $B(2; 3)$ ir $A_1(7; 12)$.

174. Kurioje koordinačių plokštumos dalyje yra taškas $P(x; y)$, kai:
a) $x > 0$, $y > 0$? b) $x < 0$, $y < 0$? c) $x > 0$, $y < 0$?
d) $x = 0$, $y > 0$? e) $x < 0$, $y > 0$? f) $x < 0$, $y = 0$?

175. Koordinačių plokštumoje nubraižyti trys apskritimai.



1) Atkarpa AB yra I apskritimo skersmuo. To skersmens galų koordinatės $A(-7; 3)$, $B(-6; 6)$. Apskaičiuokite I apskritimo spindulio ilgį r ir centro O_1 koordinates.
2) Atkarpa O_2C yra II apskritimo spindulys. To spindulio galų koordinatės $O_2(6; 6)$, $C(10; 10)$. Raskite apskritimo skersmens CD ilgį ir taško D koordinates.
3) Apskaičiuokite atstumą tarp I ir II apskritimų centrų.
4) Apskaičiuokite III apskritimo ilgį C, jei jo centro koordinatės yra $(0; -4)$.

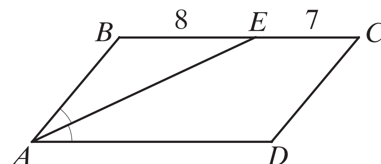
KARTOJAME

176. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą, kai:
a) $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, $AB = 14$ cm;
b) $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$, $AC = 3$ dm;
c) $\angle C = 90°$, $\angle B = 2 \cdot \angle A$, $AC = 2{,}5$ m.

> Jei stačiojo trikampio vienas kampas lygus 30°, tai prieš jį esantis statinis lygus pusei įžambinės.

177. Apskaičiuokite stačiojo trikampio aukštinės, nubrėžtos į įžambinę, ilgį, kai trikampio statiniai lygūs:
a) 6 cm ir 8 cm; b) 8 dm ir 1,5 m; c) 2,5 cm ir 25 mm.

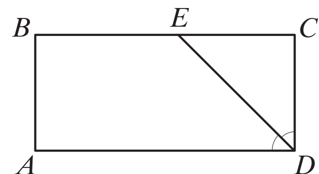
178. *Duota*: $ABCD$ — lygiagretainis, $BE = 8$ cm, $EC = 7$ cm, AE — pusiaukampinė.



> *Lygiagretainis* yra keturkampis, kurio priešingosios kraštinės lygiagrečios.

1) Įrodykite, kad $\triangle ABE$ yra lygiašonis.
2) Apskaičiuokite lygiagretainio $ABCD$ perimetrą.

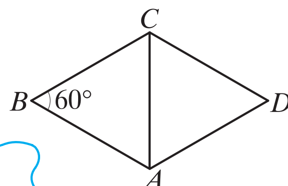
179. *Duota*: $ABCD$ — stačiakampis, $\angle CDE = \angle ADE$, $BE : EC = 7 : 3$, $P_{ABCD} = 78$ dm.



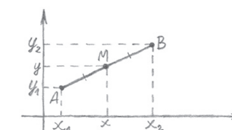
> *Stačiakampis* yra lygiagretainis, kurio kampai statūs.

Apskaičiuokite stačiakampio kraštinių ilgius.

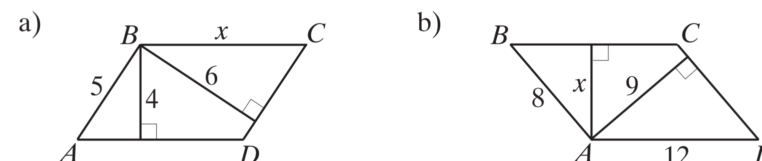
180. *Duota*: $ABCD$ — rombas,
$\angle ABC = 60°$, $AC = 16$ cm.
Raskite: 1) P_{ABCD}; 2) BD.

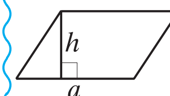


> Rombas — lygiagretainis, kurio visos kraštinės lygios.
> - Rombo įstrižainės susikerta stačiu kampu.
> - Rombo įstrižainės susikirsdamos viena kitą dalija pusiau.
> - Rombo įstrižainės rombo kampus dalija pusiau.



181. $ABCD$ — lygiagretainis. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite x.



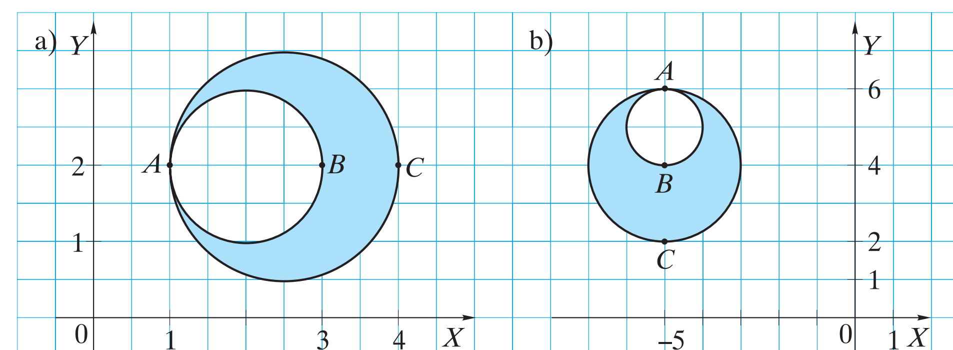


> Lygiagretainio plotas lygus kraštinės ir į ją nubrėžtos aukštinės ilgių sandaugai: $S = a \cdot h$.

182. Lygiašonės trapecijos pagrindai yra $5\frac{1}{4}$ cm ir $8\frac{1}{4}$ cm, o jos plotas lygus $13\frac{1}{2}$ cm^2. Apskaičiuokite trapecijos perimetrą.

> - *Trapecija* yra keturkampis, kurio dvi kraštinės yra lygiagrečios (jos vadinamos pagrindais), o kitos dvi kraštinės nėra lygiagrečios (jos vadinamos šoninėmis kraštinėmis).
> - Trapecija, kurios šoninės kraštinės yra lygios, vadinama *lygiašone trapecija*.

183. Koordinačių plokštumoje nubraižyti du taške A besiliečiantys apskritimai. AB ir AC — tų apskritimų skersmenys. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite nuspalvintos figūros plotą, kai žinomos taškų A, B ir C koordinatės.



184. Iš vieno vielos gabalo buvo pagamintas 24 cm skersmens apskritimas. Iš kito tokio pat gabalo buvo pagaminti 4 vienodi mažesni apskritimai.
1) Apskaičiuokite didžiojo apskritimo ilgį.
2) Apskaičiuokite mažojo apskritimo spindulio ilgį.
Atsakymus parašykite su raide π ir vietoj π imdami 3.

PRISIMENAME TAI, KO PRIREIKS KITAME SKYRIUJE

185. Apskaičiuokite raidinio reiškinio reikšmę.

a) $x^3 - 5$, kai $x = -2$; $x = 0$; $x = 2$;

b) $-x^2 + 5$, kai $x = -2$; $x = 0$; $x = 2$;

c) $1 + 2\sqrt{x}$, kai $x = 0$; $x = 1$; $x = 100$.

186. Sudarykite raidinį reiškinį ir pasirinkite tinkamą atsakymą.

a) Sugalvotą teigiamą skaičių n padidinę dvigubai ir gautąjį rezultatą padidinę 7 vienetais, gauname skaičių:

A $(n + 2) \cdot 7$ **B** $2n + 7$ **C** $2n \cdot 7$ **D** $(n + 2) + 7$

b) Julija turi 5 skrybėlėmis mažiau negu Marytė, o Kristina turi 3 kartus daugiau skrybėlių už Juliją. Kuris iš šių reiškinių atitinka Kristinos skrybėlių skaičių, jeigu Marytė turi n skrybėlių?

A $5 - 3n$ **B** $3n$ **C** $n - 5$ **D** $3n - 5$ **E** $3(n - 5)$

187. Grafikas vaizduoja dienos ilgumo priklausomybę nuo metų laiko Švėdijoje. Ordinačių ašyje nurodytas dienos ilgumas (minutėmis), abscisių ašyje — mėnesio numeris. Taškai žymi kiekvieno mėnesio pirmosios dienos temperatūrą.



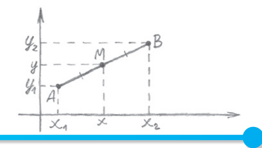
1) Naudodamiesi grafiku, nustatykite:

a) koks dienos ilgumas yra kovo; birželio; rugsėjo; gruodžio pirmąją dieną;

b) kokiu maždaug laikotarpiu dienos ilgis didesnis nei 650 minučių, bet mažesnis nei 750 minučių;

c) kuriais mėnesiais dienos ilgėja; trumpėja;

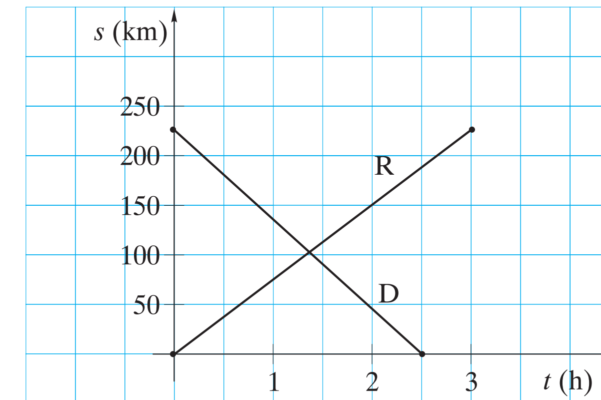
d) ilgiausios dienos trukmę valandomis, o trumpiausios — valandomis ir minutėmis.



2) Kaip manote, ar iš pateikto grafiko galima apibūdinti, kaip Švedijoje kinta dienos ilgumas gruodžio mėnesį?

3) Pažiūrėkite į kalendorių ir nubraižykite analogišką Lietuvos dienų ilgumo grafiką.

188. Tuo pačiu laiku ir tuo pačiu keliu vienas priešais kitą automobiliais išvažiavo Rimas (R) iš Kretingõs ir Dainius (D) iš Kaũno. Koordinačių plokštumoje pavaizduota, kaip, bėgant laikui, kito atstumas tarp automobilių ir automobilių atstumai iki miestų.



Naudodamiesi brėžiniu, nustatykite:

a) ką rodo dydžio s reikšmės;

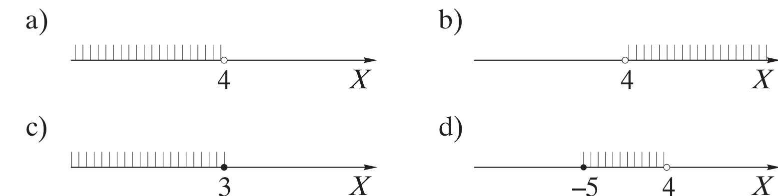
b) apytikslį atstumą nuo Kauno iki Kretingos;

c) maždaug po kelių minučių nuo išvažiavimo momento Rimas ir Dainius susitiko;

d) kiek maždaug kilometrų buvo nuvažiavęs kiekvienas, kai jie susitiko;

e) kokiu maždaug greičiu važiavo Dainius ir kokiu — Rimas.

189. Užrašykite intervalą, atitinkantį užbrūkšniuotą skaičių tiesės dalį.



190. Užbrūkšniuokite skaičių tiesės dalį, atitinkančią intervalą:

a) $(-\infty; 3)$; b) $(3; +\infty)$; c) $(-\infty; -3]$; d) $[-3; +\infty)$;

e) $[2; 6)$; f) $(2; 6]$; g) $(-2; 2)$; h) $[-1; 4]$.

Du reiškiniai

1 UŽDAVINYS. Imkime du reiškinius su vienu kintamuoju x:

$2x+1$ ir $-x+4$.

Raidinio reiškinio raidės yra vadinamos to reiškinio kintamaisiais.

1) Raskite kintamojo x reikšmę, su kuria abiejų reiškinių reikšmės yra *lygios*.

Paprasčiausia šį uždavinį spręsti sudarant lygtį:

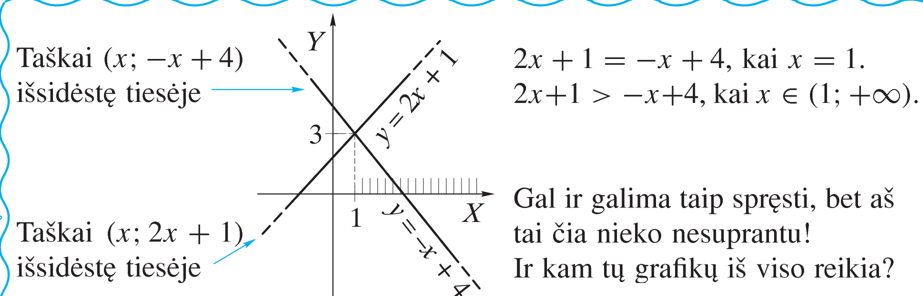
$2x+1=-x+4.$

2) Raskite kintamojo x reikšmes, su kuriomis reiškinio $2x+1$ reikšmės yra *didesnės* už atitinkamas reiškinio $-x+4$ reikšmes.

O šio uždavinio atsakymą galima sužinoti sprendžiant nelygybę:

$2x+1>-x+4.$

3) O dabar pažiūrėkite, kaip į 1) ir 2) klausimus galima atsakyti naudojantis tų reiškinių grafikais.



$2x+1=-x+4$, kai $x=1$.
$2x+1>-x+4$, kai $x\in(1; +\infty)$.

Gal ir galima taip spręsti, bet aš tai čia nieko nesuprantu! Ir kam tų grafikų iš viso reikia?

2 UŽDAVINYS. O dabar pabandykite nustatyti tas x reikšmes, su kuriomis:
1) reiškinių x^2 ir $\frac{8}{x}$ reikšmės yra lygios;
2) reiškinio x^2 reikšmės yra didesnės už atitinkamas reiškinio $\frac{8}{x}$ reikšmes.

Nei lygties $x^2=\frac{8}{x}$, nei nelygybės $x^2>\frac{8}{x}$ spręsti nemoku.
Tokias lygtis ir nelygybes spręsti algebriškai mokysimės aukštesnėse klasėse, bet jų sprendinius (dažniausiai apytikslius) sugebėsime rasti šiame skyriuje išmokę braižyti reiškinių x^2 ir $\frac{8}{x}$ grafikus.

Reiškiniai su vienu kintamuoju

Šiame skyriuje nagrinėsime reiškinius, kuriuose yra tik vienas kintamasis.

- Prisiminsime, kaip skaičiuojama reiškinio reikšmė, kai žinoma reiškinio kintamojo reikšmė.
- Mokysimės rasti reiškinio kintamojo reikšmę, kai žinoma reiškinio reikšmė.
- Mokysimės koordinačių plokštumoje pavaizduoti reiškinio reikšmes, t.y. braižyti reiškinio grafiką.
- Mokysimės grafiškai spręsti lygtis ir nelygybes.

3.1. REIŠKINIO SU VIENU KINTAMUOJU REIKŠMĖS

Agnė parašė programėlę, kuri įvestą į kompiuterį skaičių x padaugina iš 2:

$$x \cdot 2$$

ir prie gautojo rezultato prideda 1:

$$x \cdot 2 + 1.$$

Ta programėlė išspausdina skaičių porą $(x; x \cdot 2 + 1)$ — įvestą skaičių ir gautąjį rezultatą.

Pavyzdžiui, į kompiuterį įvedus skaičių -3, bus atspausdinta $(-3; -5)$, nes: kai $x = -3$, tai $-3 \cdot 2 + 1 = -5$.

Užduotis. 1) Kokį reiškinį sudarė Agnė rašydama programėlę?

2) Nuo ko priklauso to reiškinio reikšmė?

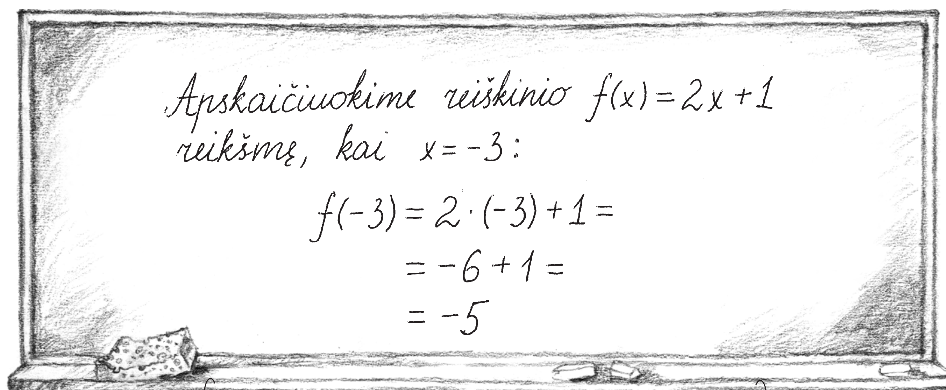
Norėdami pabrėžti, kad reiškinio $2x+1$ reikšmė *priklauso* nuo x reikšmės: *Rašysime*: $f(x) = 2x + 1$. *Skaitysime*: Ef nuo iks lygu ...

O kam taip keistai rašyti $f(x) = \ldots$? Ką žymi raidė f?

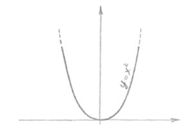
Į raidę f galima žiūrėti kaip į reiškinio pavadinimą. Žinoma, vietoj f galima imti ir kitokią *raidę* (reiškiniui suteikti kitokį pavadinimą), pvz., g, A, ...

3) Kokią skaičių porą atspausdins Agnės programėlė, kai į kompiuterį įvesime skaičiaus x reikšmę, lygią -2? -1? 0? 1? 2?

4) Pabaikite lygybes:
$f(-2) = \ldots$; $f(-1) = \ldots$; $f(0) = \ldots$; $f(1) = \ldots$; $f(2) = \ldots$



Sakysime: Ef nuo minus trijų lygu minus penkiems



191. Tarkime, kad jums reikia parašyti programą, kuri įvestą į kompiuterį skaičių n padalija iš 2 ir iš gauto dalmens atima skaičių 3.
1) Sudarykite reiškinį, kuriuo remiantis veiktų ta programėlė.
2) Pavadinkite tą reiškinį savo vardo pirmąja raide ir greta skliausteliuose nurodykite reiškinio kintamąjį.

Aš reiškinį $\frac{m}{3} - 1$ pavadinsiu raide Š:
$Š(m) = \frac{m}{3} - 1$

3) Apskaičiuokite reiškinio reikšmę, kai:
$n = -3$; $n = -2$; $n = -1$; $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$.

$Š(-3) = \frac{-3}{3} - 1 = -1 - 1 = -2$

4) Raskite n reikšmę, su kuria reiškinio reikšmė lygi:
-3; 0; 3.

$\frac{m}{3} - 1 = 0$, kai $m = 3$.
Iš tikrųjų, kai $m = 3$, tai $\frac{3}{3} - 1 = 1 - 1 = 0$.
Tą m reikšmę gauname spręsdami lygtį:
$\frac{m}{3} - 1 = 0 \rightarrow \frac{m}{3} = 1 \rightarrow m = 3$.

192. 1) Užrašykite reiškinį $f(x)$, kurio reikšmės apskaičiuojamos naudojantis tokia taisykle:
a) prie skaičiaus x pridedama 2 ir gautoji suma padauginama iš 3;
b) skaičius x pakeliamas kvadratu, o tada atimamas 1.
2) Apskaičiuokite $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(2)$.
3) Raskite x reikšmę, su kuria reiškinio $f(x)$ reikšmė lygi 0.

193. Duotas reiškinys $g(x)$:

a) $g(x) = -7x + 2$; b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2$;

c) $g(x) = 1 - x^2$; d) $g(x) = \frac{x^2+1}{4}$;

e) $g(x) = -x^3$; f) $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - 1$.

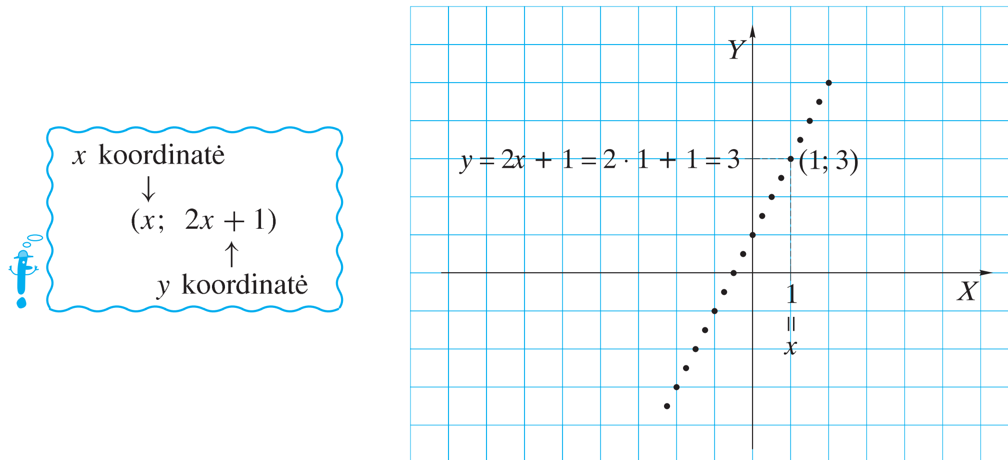
1) Apskaičiuokite $g(-2)$, $g(0)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $g(2)$.
2) Su kuriomis x reikšmėmis a)–c) punktų reiškinių reikšmės lygios 0, t. y. $g(x) = 0$?

3.2. REIŠKINYS $f(x) = ax + b$

Prisiminkime Agnės programėlę, kuri spausdina skaičių porą:

$(x;\ 2x + 1)$ — įvestą skaičių x ir reiškinio $2x + 1$ reikšmę.

Justas parašė kitą programėlę, kuri skaičių x ir $2x + 1$ poras pavaizduoja koordinačių plokštumos taškais.

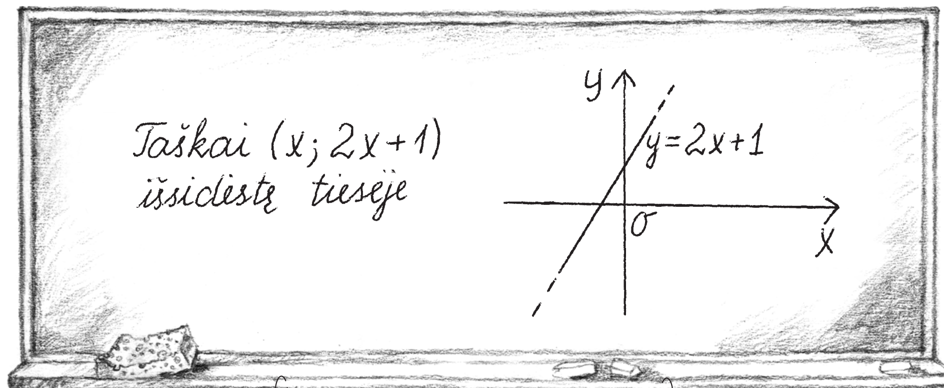


Užduotis.

1) Koordinačių plokštumoje pažymėkite taškus $(x;\ f(x))$, kai $f(x) = 2x + 1$, o $x = -2$; $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$, t. y. taškus:

$$(-2;\ f(-2)),\quad (-1;\ f(-1)),\quad (0;\ f(0)),\quad (1;\ f(1)),\quad (2;\ f(2)).$$

2) Jei viską atlikote teisingai, tai gavote, kad pažymėtieji taškai išsidėstę vienoje *tiesėje*!



Sakysime: Reiškinio $2x + 1$ grafikas yra tiesė.
Rašysime: Tiesė $y = 2x + 1$.

194. Imkime du reiškinius:

a) $f(x) = 2x$ ir $g(x) = -2x$; b) $f(x) = 3x$ ir $g(x) = -3x$;
c) $f(x) = x$ ir $g(x) = -x$.

1) Apskaičiuokite abiejų reiškinių reikšmes, kai $x = -2$; $x = 0$; $x = 2$, ir užpildykite lentelę.

$x =$	-2	0	2
$f(x) =$			
$g(x) =$			

2) Koordinačių plokštumoje pažymėkite taškus, kurių koordinatės yra $(-2;\ f(-2))$, $(0;\ f(0))$, $(2;\ f(2))$. Per tuos taškus nubrėžkite tiesę — reiškinio $f(x)$ grafiką.

3) Toje pačioje koordinačių plokštumoje pažymėkite taškus $(-2;\ g(-2))$, $(0;\ g(0))$, $(2;\ g(2))$ ir per juos nubrėžkite tiesę — reiškinio $g(x)$ grafiką.

195. Naudodamiesi 194 uždavinio pavyzdžiais, pabandykite pabaigti sakinius.

1) Reiškinio $f(x) = ax$, kur a — skaičius, grafikas yra tiesė, kuri eina per koordinačių pradžios ..., t. y. tašką (...; ...).

2) Kai a yra *teigiamas* skaičius, tai tiesė $y = ax$ eina per I ir per ... koordinačių plokštumos ketvirčius.

3) Kai a yra *neigiamas* skaičius, tai tiesė $y = ax$ eina per ... ir per ... koordinačių plokštumos ketvirčius.

196. Imkime tris reiškinius:

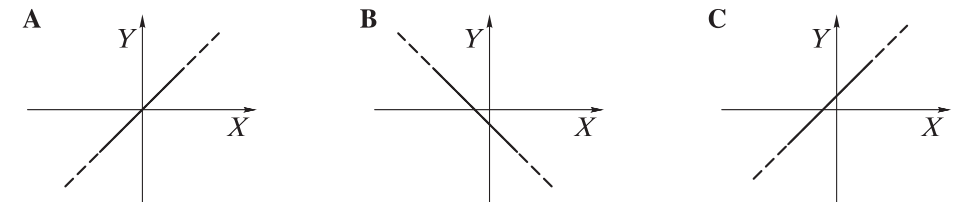
a) $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x + 3$, $h(x) = 2x - 3$;
b) $f(x) = 3x$, $g(x) = 3x + 2$, $h(x) = 3x - 2$;
c) $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = x - 1$.

1) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite visų tų trijų reiškinių grafikus, t. y. tieses $y = f(x)$, $y = g(x)$ ir $y = h(x)$.

Reiškinio $ax + b$ (a ir b — skaičiai) grafikas yra tiesė. Braižant tiesę $y = ax + b$, pakanka žinoti dviejų jos taškų koordinates!

2) Pasvarstykite, kaip susiję reiškinių $f(x)$, $g(x)$ ir $h(x)$ grafikai.

197. Paveikslėliuose pavaizduotos trys tiesės: $y = -x - 1$, $y = x$ ir $y = x + 1$.



1) Kokia tiesė pavaizduota paveikslėlyje **A**? paveikslėlyje **B**?

2) Kuri iš tų trijų tiesių eina per tašką (2; 2)? (−2; 1)? (10; 11)?

3.3. REIŠKINYS $f(x) = \frac{a}{x}$

Užrašykime reiškinį, kurio reikšmės $f(x)$ būtų skaičiai, *atvirkštiniai* skaičiams x:

$f(x) = \frac{1}{x}$.

> Skaičiai $\frac{a}{b}$ ir $\frac{b}{a}$ vadinami vienas kitam atvirkštìniais $(a, b \neq 0)$.
> Skaičiui a atvirkštinis yra skaičius $\frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$.

Užduotis. 1) Kokiõs reikšmẽs *negali įgyti* reiškinio $\frac{1}{x}$ kintamasis x?

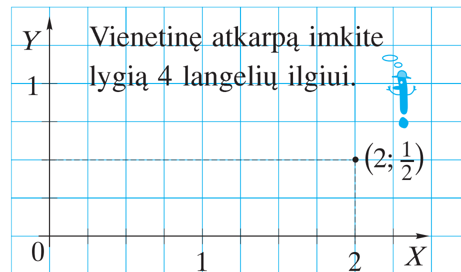
2) Apskaičiuokite reiškinio $f(x) = \frac{1}{x}$ reikšmes, kai $x = 4$; $x = 3$; $x = 2$; $x = 1$; $x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{3}$; $x = \frac{1}{4}$, ir užpildykite lentelę:

$x =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$\frac{1}{x} =$		3				$\frac{1}{3}$	

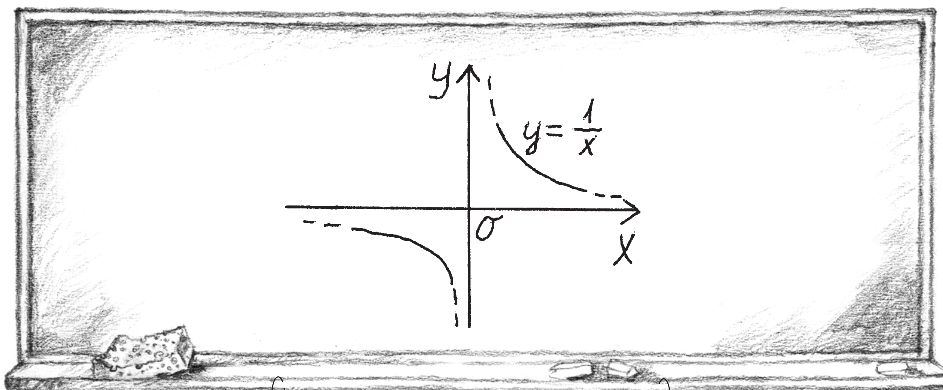
> $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 1 : \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{3}{1} = 3$
> $f(3) = \frac{1}{3}$

3) Naudodamiesi lentele, koordinačių plokštumos I ketvirtyje pažymėkite taškus $\left(x; \frac{1}{x}\right)$.
Per tuos taškus nubrėžkite kreivę.

> Sąsiuvinio lape brėžinys gali netilpti. Todėl braižykite atskirame dideliame lape!



4) Toje pačioje koordinačių plokštumoje pažymėkite taškus:
$(-4; f(-4))$, $(-3; f(-3))$, $(-2; f(-2))$, $(-1; f(-1))$,
$\left(-\frac{1}{2}; f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$, $\left(-\frac{1}{3}; f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$, $\left(-\frac{1}{4}; f\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.
Per tuos taškus nubrėžkite kreivę.



> Taškai $\left(x; \frac{1}{x}\right)$ išsidėstę kreivės, vadinamos *hipèrbole*, šakose.

198. Imkime reiškinį $-\frac{1}{x}$.

1) Su kuria x reikšme reiškinys $-\frac{1}{x}$ neturi prasmės?

2) Apskaičiuokite reiškinio reikšmes, kai $x = \frac{1}{4}$; $x = \frac{1}{3}$; $x = \frac{1}{2}$; $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$; $x = 4$, ir užpildykite lentelę:

$x =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
$-\frac{1}{x} =$							

3) Per visą puslapį nusibraižykite koordinačių plokštumą, kurios ašių vienetinių atkarpų ilgiai būtų lygūs 4 langelių ilgiui.

4) Toje koordinačių plokštumoje pažymėkite 2)-o punkto lentelės taškus ir juos sujunkite kreive.

5) Užpildykite lentelę:

$x =$	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{x} =$							

Lentelę atitinkančius taškus pažymėkite toje pačioje koordinačių plokštumoje ir per juos nubrėžkite kreivę.

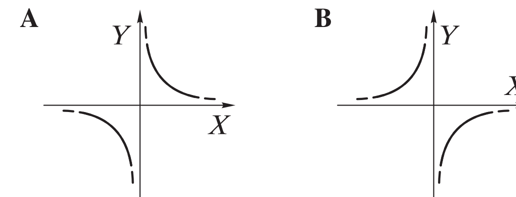
6) Kuriuose ketvirčiuose išsidėsčiusi hiperbolė $y = -\frac{1}{x}$?

7) Ar hiperbolė $y = -\frac{1}{x}$ eina per tašką
$(3; 3)$? $(-3; 3)$? $\left(-3; -\frac{1}{3}\right)$? $(-10; 0{,}1)$?

> $A\left(\frac{1}{3}; 3\right)$ priklauso hiperbolei $\frac{1}{x}$, nes $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.
> $B\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ nepriklauso hiperbolei $\frac{1}{x}$, nes $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$.

199. Nubraižykite hiperbolę: a) $y = \frac{2}{x}$; b) $y = -\frac{2}{x}$.

200. Paveikslėliuose pavaizduotos dvi hiperbolės: $y = \frac{3}{x}$ ir $y = -\frac{3}{x}$.



1) Kuriame paveikslėlyje kuri hiperbolė pavaizduota?

2) Kuri iš tų hiperbolių eina per tašką $(3; 1)$? $(-3; 1)$? $(-3; -1)$? $(1; 3)$?

201. Kuriuose ketvirčiuose išsidėsčiusi hiperbolė $y = \frac{a}{x}$, kai $a > 0$? $a < 0$?

3.4. REIŠKINYS $f(x) = ax^2$

Užrašykime reiškinį, kurio reikšmės $f(x)$ būtų skaičiaus x kvadratai:

$f(x) = x^2$.

$a^2 = a \cdot a$

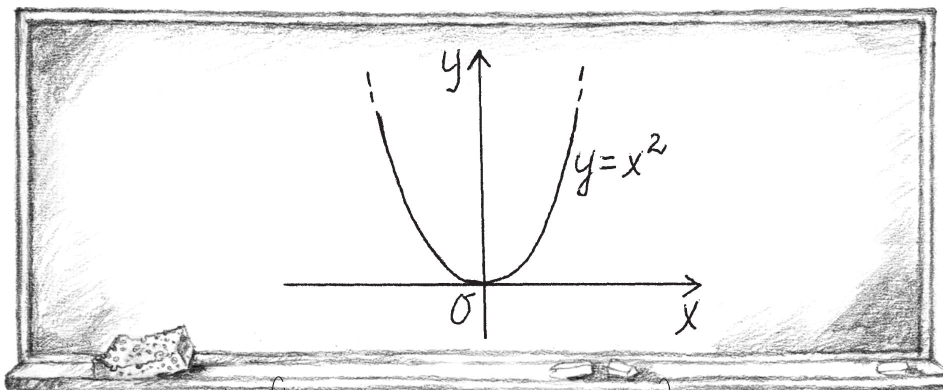
Užduotis.

1) Užpildykite reiškinio $f(x) = x^2$ reikšmių lentelę:

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x^2 =$		9						9	

$f(3) = 3^2 = 9$
$f(-3) = (-3)^2 = 9$

2) Lentelės duomenis pavaizduokite koordinačių plokštumoje, t. y. pažymėkite taškus $(x; x^2)$. Per tuos taškus nubrėžkite kreivę.



Taškai $(x; x^2)$ išsidėstę kreivėje, kuri vadinama *parãbole*.

3) Kuriuose ketvirčiuose išsidėsčiusi parabolė

$y = x^2$?

4) Ar parabolė $y = x^2$ turi simetrijos ašį?

Tiesė yra figūros simètrijos ašis, jei, sulenkus lapą per tą tiesę, abiejose tos tiesės pusėse esančios figūros dalys sutampa.

5) Pasakykite parabolės $y = x^2$ viršūnės koordinates.

Parabolės viršūne vadinamas parabolės ir jos simetrijos ašies susikirtimo taškas.

202. 1) Užpildykite reiškinio $f(x) = -x^2$ reikšmių lentelę:

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$-x^2 =$									

$f(-4) = -(-4)^2 = -16$
$f(4) = -4^2 = -16$

2) Lentelės taškus pažymėkite koordinačių plokštumoje. Tuos taškus sujunkite kreive.

3) Kuriuose ketvirčiuose išsidėsčiusi parabolė $y = -x^2$?

203. 1) Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykite paraboles:

a) $y = 2x^2$ ir $y = -2x^2$; b) $y = 3x^2$ ir $y = -3x^2$.

2) Pabaikite sakinį:

Parabolės $y = ax^2$ *ir* $y = -ax^2$ $(a \neq 0)$ *yra simetriškos ... ašies atžvilgiu.*

204. 1) Užpildykite lentelę:

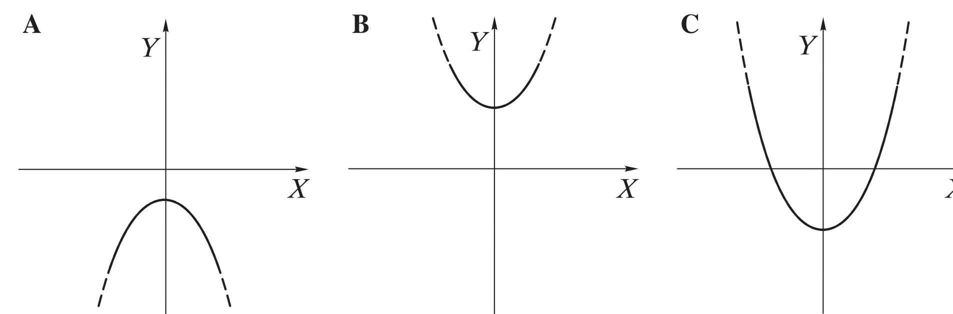
$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x^2 =$									
$x^2 + 1 =$									
$x^2 - 1 =$									

2) Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykite paraboles:

$y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$.

3) Kaip remiantis parabole $y = x^2$ nubraižyti parabolę $y = x^2 + 1$? parabolę $y = x^2 - 1$?

205. Paveikslėliuose nubraižytos trys parabolės: $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$ ir $y = -x^2 - 1$.



1) Kuriame paveikslėlyje kuri parabolė pavaizduota?

2) Kuri iš tų parabolių eina per tašką $(0; 2)$? $(-2; -5)$? $(10; 98)$?

3) Nustatykite tų parabolių viršūnių koordinates.

3.5. REIŠKINYS $f(x) = ax^3$

Užrašykime reiškinį, kurio reikšmės $f(x)$ būtų skaičiaus x kubai:

$$f(x) = x^3.$$

$a^3 = a \cdot a \cdot a$

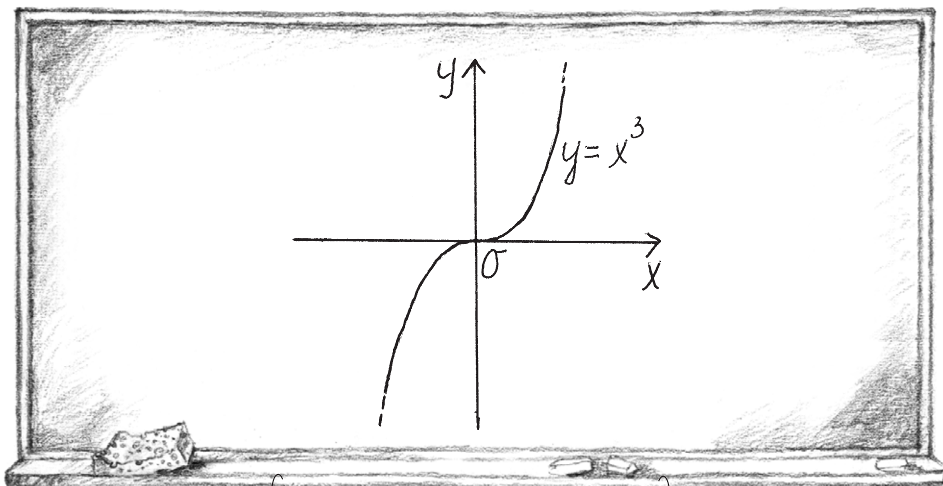
Užduotis.

1) Užpildykite reiškinio $f(x) = x^3$ reikšmių lentelę:

$x =$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x^3 =$	-27						27

$f(-3) = (-3)^3 = -27$
$f(3) = 3^3 = 27$

2) Lentelės duomenis pavaizduokite koordinačių plokštumoje, t. y. pažymėkite taškus $(x; x^3)$. Per tuos taškus nubrėžkite kreivę.



Taškai $(x; x^3)$ išsidėstę kreivėje, kuri vadinama *kùbine parãbole.*

3) Kuriuose ketvirčiuose išsidėsčiusi kubinė parabolė

$$y = x^3?$$

4) Ar kubinė parabolė $y = x^3$ turi simetrijos centrą?

Taškas yra figūros simetrijos centras, jei, pasukus figūrą 180° kampu apie tą tašką, ji sutampa su pačia savimi.



206. 1) Užpildykite reiškinio $f(x) = -x^3$ reikšmių lentelę:

$x =$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^3 =$	27						-27

$f(-3) = -(-3)^3 = -(-27) = 27$
$f(3) = -3^3 = -27$

2) Lentelės taškus pažymėkite koordinačių plokštumoje. Tuos taškus sujunkite kreive.
3) Kuriuose ketvirčiuose išsidėsčiusi kubinė parabolė $y = -x^3$?

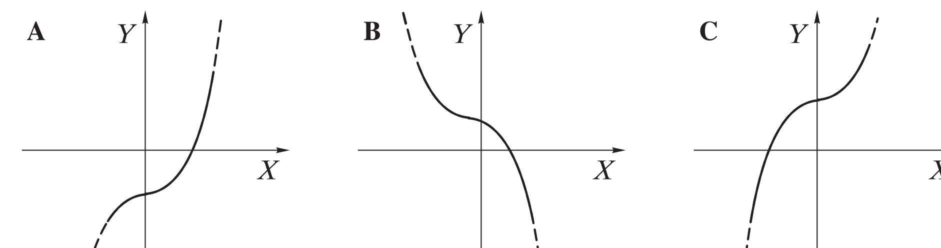
207. Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykite kubines paraboles:
a) $y = \frac{1}{2}x^3$ ir $y = -\frac{1}{2}x^3$; b) $y = \frac{1}{3}x^3$ ir $y = -\frac{1}{3}x^3$.

208. 1) Užpildykite lentelę:

$x =$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x^3 =$							
$x^3 + 1 =$							
$x^3 - 1 =$							

2) Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykite kubines paraboles:
$y = x^3$, $y = x^3 + 1$, $y = x^3 - 1$.
3) Pabaikite sakinį:
Kubinę parabolę $y = x^3 + a$ $(a > 0)$ *galima gauti pastūmus kubinę parabolę* $y = x^3$ *per a vienetų … .*
4) Naudodamiesi kubinės parabolės $y = x^3$ grafiku, nubraižykite kubinę parabolę $y = x^3 + 3$.

209. Paveikslėlyje nubraižytos trys kubinės parabolės $y = x^3 + 2$, $y = x^3 - 2$ ir $y = -x^3 + 1$.



1) Kuriame paveikslėlyje kuri kubinė parabolė pavaizduota?
2) Kuri iš tų parabolių eina per tašką (0; 1)? (−2; −6)? (5; 123)?
3) Nustatykite kiekvienos kubinės parabolės simetrijos centro koordinates.

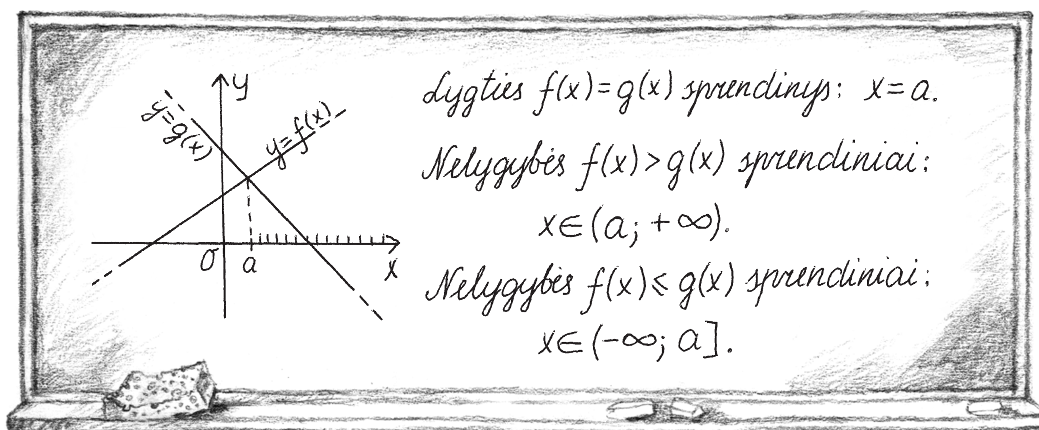
3.6. LYGČIŲ IR NELYGYBIŲ SPRENDIMAS BRAIŽANT GRAFIKUS

Prisiminkime skyriaus pradžioje (62 psl.) pateiktą lygtį ir nelygybę:

$$2x+1=-x+4, \qquad 2x+1>-x+4.$$

Užduotis.

1) Koordinačių plokštumoje nubraižykite kairėje lygties (nelygybės) pusėje esančio reiškinio grafiką, t. y. tiesę
$y=2x+1$.
2) Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykite dešinėje lygties (nelygybės) pusėje esančio reiškinio grafiką, t. y. tiesę
$y=-x+4$.
3) Nustatykite tų grafikų ***bendro*** taško koordinatę x.
4) Įsitikinkite, kad ta x reikšmė yra lygties
$2x+1=-x+4$ (Išspręskite šią lygtį.)
sprendinys.
5) Raskite tas x reikšmes (reikšmių intervalą), su kuriomis reiškinio $2x+1$ grafikas yra ***virš*** reiškinio $-x+4$ grafiko.
6) Įsitikinkite, kad surastas x reikšmių intervalas yra nelygybės
$2x+1>-x+4$ (Išspręskite šią nelygybę.)
sprendinių intervalas.



7) Išspręskite nelygybę $2x+1 \leqslant -x+4$ algebriškai ir įsitikinkite, kad su gautosiomis x reikšmėmis tiesės $y=2x+1$ dalis yra *ne aukščiau* už tiesės $y=-x+4$ dalį.

210. Braižydami lygties abiejų pusių reiškinių grafikus, nustatykite, kiek sprendinių turi lygtis.

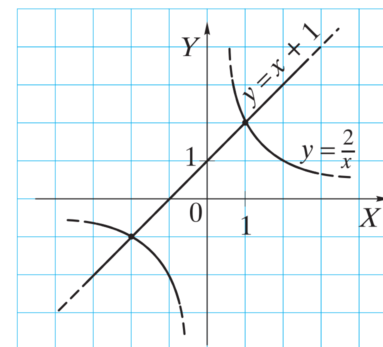
a) $\frac{4}{x}=3x$; b) $\frac{4}{x}=x^2$; c) $-\frac{1}{x}=x$; d) $-\frac{1}{x}=-x^2$;
e) $x^3=x$; f) $x^3=-x+1$; g) $-x^3=x^2$; h) $2x^3=2x+2$.

Kiek sprendinių turi lygtis $\frac{2}{x}=x+1$?

Klausimą galima pakeisti tokiu klausimu: Kiek yra kintamojo x reikšmių, su kuriomis reiškinių $f(x)=\frac{2}{x}$ ir $g(x)=x+1$ reikšmės yra lygios?

Sprendimas.

- Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykime abiejų reiškinių grafikus.
- Abiejų reiškinių grafikai turi du bendrus taškus. Tų bendrų taškų koordinatės x yra tos reikšmės, su kuriomis abu reiškiniai įgyja vienodas reikšmes.
- Vadinasi, lygtis $\frac{2}{x}=x+1$ turi du sprendinius.

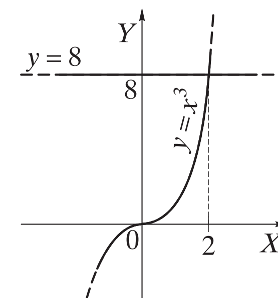


211. Paveikslėlyje nubraižyti dviejų reiškinių $y=x^3$ ir $y=8$ grafikai. Naudodamiesi paveikslėliu, išspręskite iš reiškinių x^3 ir 8 sudarytą lygtį bei nelygybes:

$x^3=8$; $x^3<8$; $x^3 \leqslant 8$; $x^3>8$; $x^3 \geqslant 8$.

O kaip suprasti reiškinio 8 grafiką?

$y=8$ yra tiesė, kurios visų taškų y koordinatės lygios 8! Tiesė $y=8$ yra lygiagreti OX ašiai.



212. Lygtį išspręskite grafiškai.

a) $4x=3$; b) $\frac{6}{x}=-2$; c) $x^2=6$;
d) $x^3=-1$; e) $4x-3=\frac{1}{2}x+2$; f) $-\frac{6}{x}=0{,}5x^2$;
g) $x^2=x+6$; h) $x^3=3-x$; i) $-x^3=-x^2+1$.

213. Nelygybes išspręskite grafiškai.

a) $x^2>1$; $x^2<1$; $x^2 \geqslant 1$; $x^2 \leqslant 1$;
b) $x^2>x+1$; $x^2<x+1$; $x^2 \geqslant x+1$; $x^2 \leqslant x+1$.

APIBENDRINAME

Reiškiniai su raidėmis vadinami raĩdiniais reiškiniaĩs. Raidinio reiškinio raidės vadinamos reiškinio *kintamaĩsiais*.

Šiame skyriuje nagrinėjami reiškiniai su vienu kintamuoju, pvz.:
$2x+4$ — kintamasis x

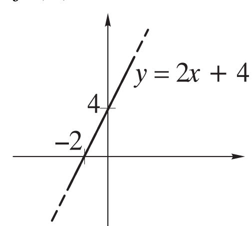
Reiškinio su kintamaisiais reikšmės priklauso nuo kintamųjų reikšmių.

Kai $x=0$, tai $2x+4=2\cdot 0+4=4$.
Kai $x=3$, tai $2x+4=2\cdot 3+4=10$.

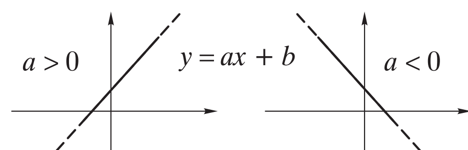
Norėdami kalbėti apie visas reiškinio reikšmes ir pabrėžti, nuo kurių kintamųjų priklauso reiškinio reikšmės, tą reiškinį pavadiname kokia nors raide (pvz., f, g, A, ...) ir šalia jos skliausteliuose nurodome to reiškinio kintamuosius.

$f(x)=2x+4$

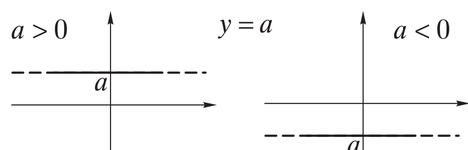
Koordinačių plokštumoje sužymėję taškus $(x;\ f(x))$, gauname reiškinio $f(x)$ grafiką $y=f(x)$.



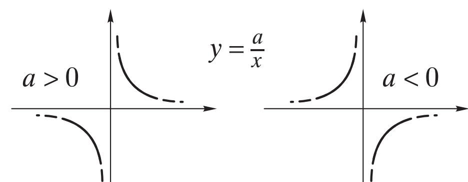
Reiškinio $f(x)=ax+b$, čia a ir b — skaičiai ($a\neq 0$), grafikas yra *tiesẽ*.



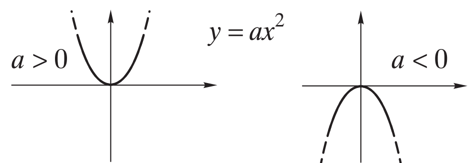
Reiškinio $f(x)=a$, čia a — skaičius, grafikas yra tiesė ($y=a$), lygiagreti OX ašiai.



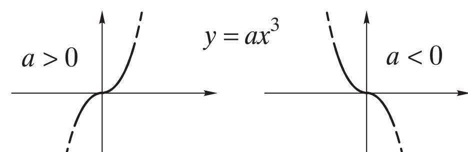
Reiškinio $f(x)=\frac{a}{x}$, čia skaičius $a\neq 0$, grafikas vadinamas *hipèrbole*.



Reiškinio $f(x)=ax^2$ ($a\neq 0$) grafikas vadinamas *parãbole*.

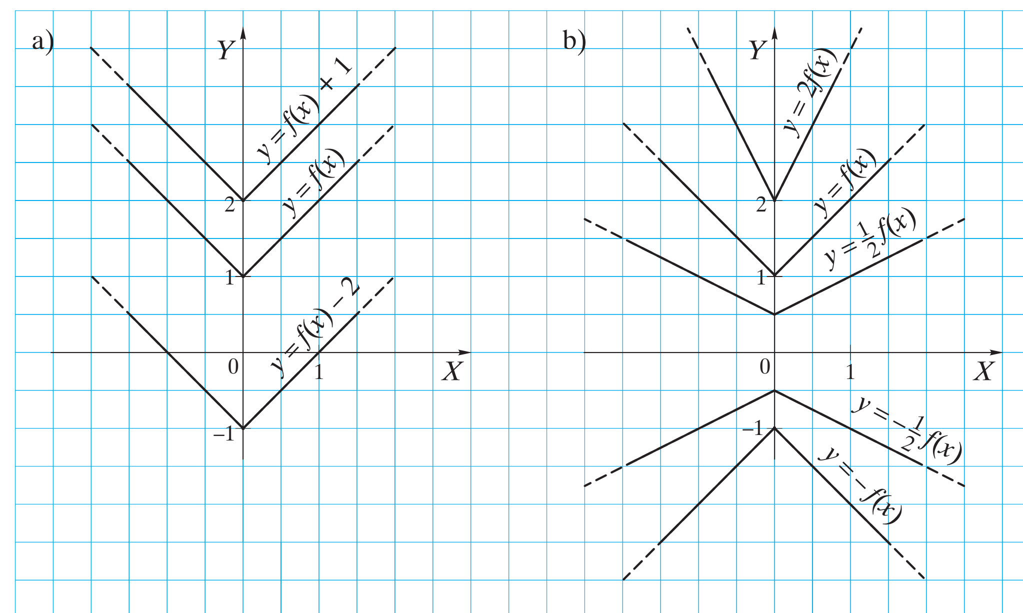


Reiškinio $f(x)=ax^3$ grafikas vadinamas *kùbine parãbole*.



Reiškinių $f(x)$, $f(x)+a$ ir $a\cdot f(x)$ grafikų ryšys

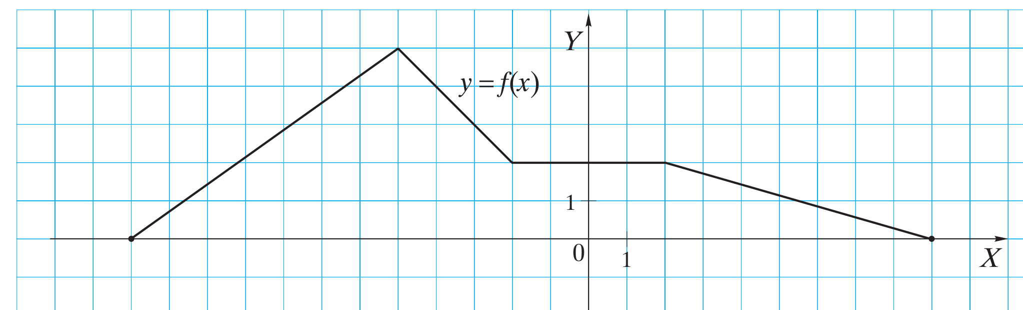
1 UŽDAVINYS.
Naudodamiesi pavaizduotais reiškinių grafikais, užbaikite sakinius.



1) Reiškinio $f(x)+a$ ($a>0$) grafiką galima gauti iš reiškinio $f(x)$ grafiko, pastūmus jį per a vienetų ... .
2) Reiškinio $f(x)-a$ ($a>0$) grafiką galima gauti iš reiškinio $f(x)$ grafiko, pastūmus jį per ... vienetų ... .

1) Reiškinio $a\cdot f(x)$ ($a\neq 0$) grafiko taškų ordinatės gaunamos padauginus reiškinio $f(x)$ grafiko taškų ordinates iš ... .
2) Reiškinių $a\cdot f(x)$ ir $-a\cdot f(x)$ ($a\neq 0$) grafikai yra simetriški ... atžvilgiu.

2 UŽDAVINYS.
Naudodamiesi reiškinio $f(x)$ grafiku, nubraižykite reiškinio $g(x)$ grafiką, kai:
a) $g(x)=2f(x)$; b) $g(x)=\frac{1}{2}f(x)$; c) $g(x)=f(x)-5$; d) $g(x)=-f(x)$;
e) $g(x)=-f(x)-2$.



SPRENDŽIAME

214. Užrašykite reiškinį $f(x)$, kurio reikšmės apskaičiuojamos naudojantis tokia taisykle:
a) skaičių 5 ir x skirtumas dauginamas iš 2;
b) prie skaičių x ir 125 skirtumo pridedama skaičių x ir 5 sandauga;
c) skaičių x ir 12 suma keliama kvadratu;
d) skaičių 2 ir x dalmuo padidinamas 8 vienetais.

215. Apskaičiuokite reiškinio $g(x)$ reikšmes $g(-1)$, $g(-0{,}5)$, $g(3)$, $g\left(\frac{2}{3}\right)$, kai:
a) $g(x) = -3x$; b) $g(x) = \frac{10}{x}$; c) $g(x) = 1$; d) $g(x) = \frac{5x}{x^2-4}$.

216. Apskaičiuokite x reikšmes, su kuriomis $g(x)$ reikšmė lygi 15, kai:
a) $g(x) = 1{,}5x + 4$; b) $g(x) = 12 - \frac{7}{3}x$; c) $g(x) = 3x^2$; d) $g(x) = 3\sqrt{x}$.

217. Reiškinys $f(x) = 4x + 5$. Užbaikite pildyti lentelę:

$x =$	$-3{,}5$	$-2{,}5$		$-0{,}5$			$1{,}5$		
$f(x) =$			-1		0	7		15	19

218. Nubraižykite reiškinio $f(x)$ grafiką, kai:
a) $f(x) = 3x$; b) $f(x) = -2{,}5x$; c) $f(x) = 1\frac{1}{3}x$; d) $f(x) = -\frac{3}{4}x$.

219. Nebraižydami reiškinio $f(x)$ grafiko, nurodykite koordinačių plokštumos ketvirčius, kuriuose jis išsidėstęs.
a) $f(x) = 251x$; b) $f(x) = -13x$; c) $f(x) = 0{,}14x$; d) $f(x) = -40x$.

220. Kurie iš taškų $A(6;\,2)$, $B(-3;\,-1)$, $C\left(-7;\,2\frac{1}{3}\right)$, $O(0;\,0)$, $D\left(8;\,-2\frac{2}{3}\right)$ priklauso reiškinio $f(x) = \frac{1}{3}x$ grafikui?

221. 1) Nubraižykite reiškinio $f(x)$ grafiką, kai:
a) $f(x) = 2x - 4$; b) $f(x) = -x + 3$; c) $f(x) = -\frac{1}{3}x - 2$.
2) Kam lygus perimetras ir plotas trikampio, kurį riboja OX ašis, OY ašis ir tiesė $y = f(x)$?

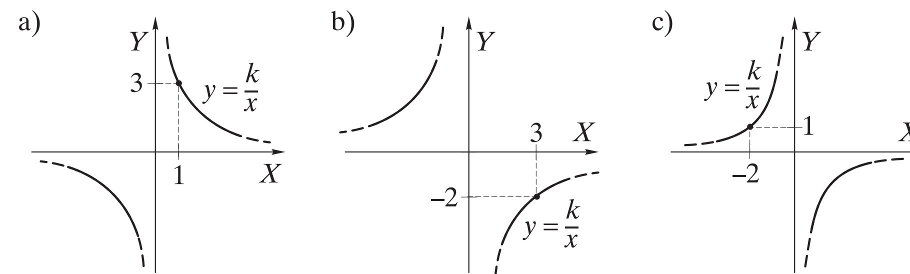
222. 1) Kokio ilgio atkarpą tiesė $y = 3x - 4$ atkerta:
a) OY ašyje nuo koordinačių pradžios?
b) OX ašyje nuo koordinačių pradžios?
2) Apskaičiuokite atstumą tarp taškų, kuriuose tiesė $y = 3x - 4$ kerta koordinačių ašis.
3) Atkarpa AB yra tiesėje $y = 3x - 4$. Apskaičiuokite tos atkarpos vidurio taško M koordinates, kai taško A koordinatė $x = -2$, o taško B koordinatė $y = 2$.

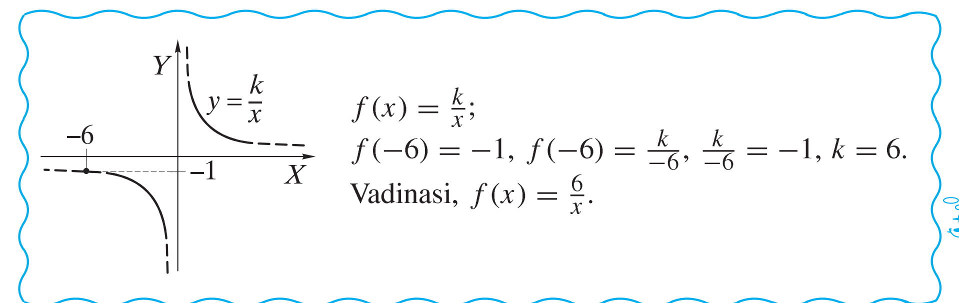
223. Stačiakampio plotis yra x cm, o ilgis — 6 cm didesnis už plotį. Užrašykite reiškiniu $P(x)$ šio stačiakampio perimetrą ir reiškiniu $S(x)$ šio stačiakampio plotą.

224. Sudarykite reiškinio $f(x) = \frac{3}{x}$ reikšmių lentelę ir nubraižykite jo grafiką.
a) Naudodamiesi grafiku, nurodykite *apytiksles reiškinio reikšmes*, atitinkančias kintamojo x reikšmes: $-4{,}5$; $-2{,}2$; $2\frac{1}{3}$; $4\frac{2}{3}$.
b) Naudodamiesi grafiku, nurodykite *apytiksles kintamojo x reikšmes*, atitinkančias reiškinio reikšmes: $-3{,}5$; $-2{,}2$; $2\frac{1}{3}$; $3\frac{2}{3}$.

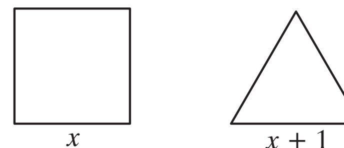
225. Nebraižydami reiškinio $f(x)$ grafiko pasakykite, kuriuose koordinačių plokštumos ketvirčiuose jis išsidėstęs.
a) $f(x) = \frac{2{,}3}{x}$; b) $f(x) = -\frac{7}{x}$; c) $f(x) = \frac{4{,}5}{x}$; d) $f(x) = -\frac{27}{7x}$.

226. Naudodamiesi reiškinio $f(x) = \frac{k}{x}$ grafiku, raskite skaičiaus k reikšmę.





227. 1) Reiškiniais užrašykite duotųjų figūrų — kvadrato ir lygiakraščio trikampio — perimetrus ($P_{kv.}$ ir $P_{tr.}$).



2) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite abiejų reiškinių grafikus.
3) Naudodamiesi grafikais palyginkite figūrų perimetrų reikšmes $P_{kv.}$ ir $P_{tr.}$, kai $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$; $x = 4$.
4) Su kuria x reikšme $P_{kv.} = P_{tr.}$?

228. Apskaičiuokite $g(-5)$, $g(-1)$, $g(3)$, $g\left(\frac{2}{3}\right)$, kai:

a) $g(x) = 2x^2$; b) $g(x) = -4x^2$; c) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$; d) $g(x) = -\frac{1}{5}x^3$.

229. Sudarykite reiškinio $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ reikšmių lentelę ir nubraižykite jo grafiką. Naudodamiesi grafiku, raskite:
a) apytikslę $f(x)$ reikšmę, kai $x = -3$; $x = 2{,}5$;
b) apytikslę x reikšmę, kai $f(x) = -5$; $f(x) = 1$.

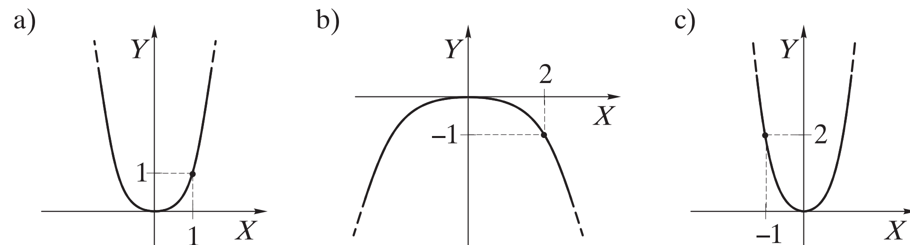
230. Nebraižydami reiškinio $f(x)$ grafiko pasakykite, kuriuose koordinačių plokštumos ketvirčiuose jis išsidėstęs.

a) $f(x) = -2{,}3x^2$; b) $f(x) = 9x^2$; c) $f(x) = -13{,}7x^2$.

231. 1) Ar priklauso reiškinio $f(x) = -25x^2$ grafikui taškas:
a) $A(-2; -100)$? b) $B(2; 100)$? c) $C\left(\frac{1}{5}; -1\right)$? d) $D\left(-\frac{2}{5}; -4\right)$?

2) Taškai $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$ priklauso parabolei $y = -25x^2$. Apskaičiuokite atkarpos AB ilgį ir jos vidurio taško M koordinates, kai:
a) $x_1 = -3$; $x_2 = 3$; b) $x_1 = -2$; $x_2 = 4$; c) $x_1 = -1$; $y_2 = -25$.

232. Užrašykite reiškinį $f(x) = ax^2$, kurio grafikas yra nubraižytoji parabolė.



233. Nubraižykite reiškinio $f(x)$ grafiką, kai:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3$; b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$.

234. Nebraižydami reiškinio $f(x)$ grafiko pasakykite, kuriuose koordinačių plokštumos ketvirčiuose jis išsidėstęs.

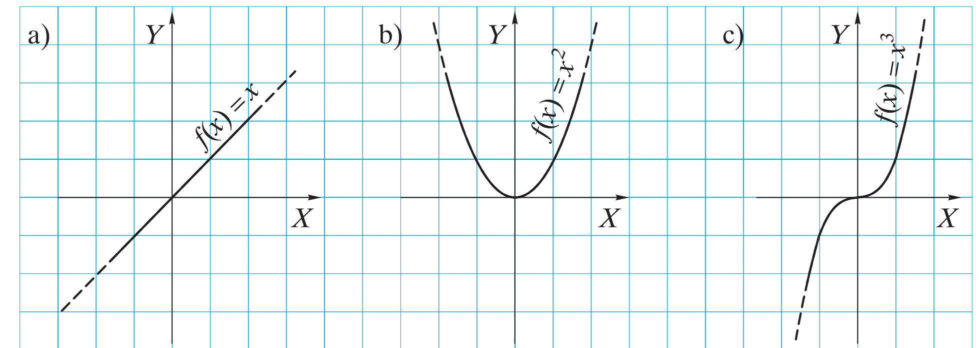
a) $f(x) = -\sqrt{7}x^3$; b) $f(x) = \sqrt{2}x^3$;
c) $f(x) = -3\sqrt{2}x^3$; d) $f(x) = \frac{\sqrt{3}x^3}{2}$.

235. Raskite skaičiaus k reikšmę, jeigu žinoma, kad reiškinio $f(x) = kx^3$ grafikas eina per tašką M.

a) $M(2; 16)$; b) $M(3; -54)$; c) $M\left(\frac{2}{3}; 24\right)$; d) $M\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$.

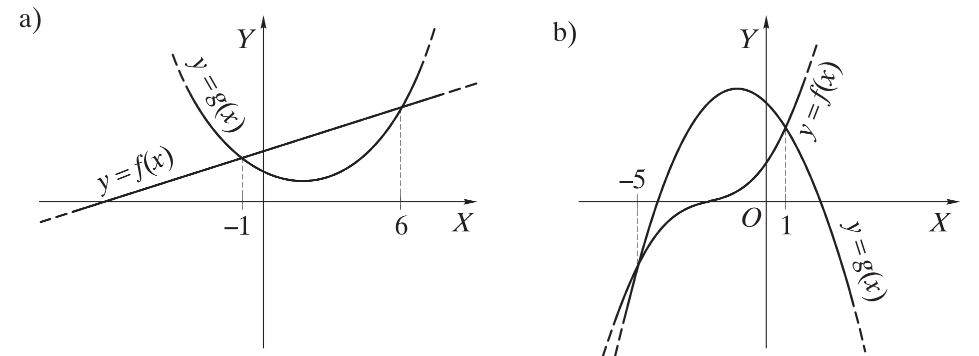
236. Apskaičiuokite atstumą tarp dviejų kubinei parabolei $y = 2x^3$ priklausančių taškų A ir B ir atkarpos AB vidurio taško M koordinates, kai:
a) taško A abscisė $x = -3$, o taško B ordinatė $y = 2$;
b) taškų A ir B abscisės yra vienas kitam priešingi skaičiai -4 ir 4.

237. Persibraižykite reiškinio $f(x)$ grafiką ir naudodamiesi juo nubraižykite:
1) reiškinių $g(x) = f(x) + 3$ ir $h(x) = f(x) - 3$ grafikus;
2) reiškinių $k(x) = 2 \cdot f(x)$ ir $l(x) = \frac{f(x)}{2}$ grafikus.



238. 1) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite reiškinių $f(x) = 2x^2$ ir $g(x) = x^3$ grafikus.
2) Naudodamiesi grafikais, raskite lygties $2x^2 = x^3$ sprendinius.
3) Naudodamiesi grafikais, raskite nelygybių $2x^2 > x^3$ ir $2x^2 \leqslant x^3$ sprendinius.

239. Naudodamiesi reiškinių $f(x)$ ir $g(x)$ grafikais užrašykite sprendinius lygties $f(x) = g(x)$; nelygybės $f(x) > g(x)$; nelygybės $f(x) \leqslant g(x)$.

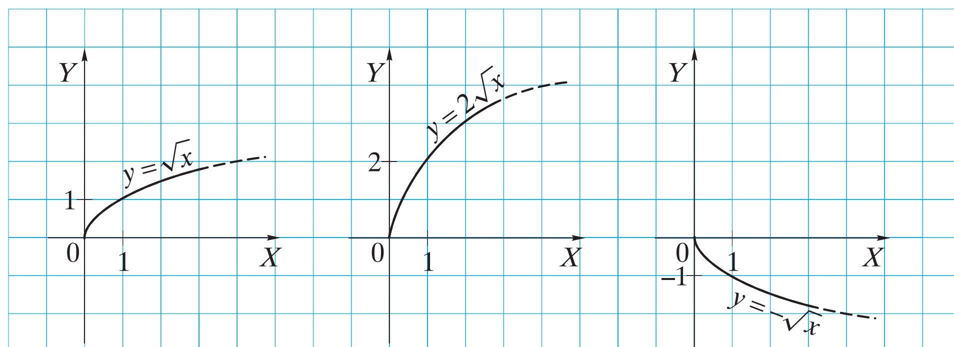



240. Kurio iš parašytų reiškinių reikšmė didžiausia, kai x yra sveikasis neigiamas skaičius?
A $x + 1$ **B** $2x$ **C** $-2x$ **D** $6x + 2$ **E** $x - 2$


241. Kurio iš nurodytų skaičių negalima išreikšti pavidalu $x + \sqrt{x}$, kai x — natūralusis skaičius?
A 30 **B** 60 **C** 90 **D** 110 **E** 870

Reiškinys $f(x) = a\sqrt{x}$

Paveikslėliuose pavaizduoti reiškinių $\sqrt{x}$, $2\sqrt{x}$, $-\sqrt{x}$ grafikai.



Uždaviniai

1. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite:

a) • parabolės $y = x^2$ šaką, esančią I ketvirtyje, t. y. nubraižykite reiškinio x^2 grafiką, imdami neneigiamas x reikšmes;
- reiškinio $\sqrt{x}$ grafiką;
- tiesės $y = x$ dalį, kurioje $x \geqslant 0$.

b) • parabolės $y = -x^2$ šaką, esančią IV ketvirtyje;
- reiškinio $-\sqrt{x}$ grafiką;
- tiesės $y = -x$ dalį, kai $x \geqslant 0$.

Jei viską atlikote teisingai, tai matote, kad:
1) grafikai $y = x^2$, kai $x \geqslant 0$, ir $y = \sqrt{x}$ yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu;
2) grafikai $y = -x^2$, kai $x \geqslant 0$, ir $y = -\sqrt{x}$ yra simetriški tiesės $y = -x$ atžvilgiu.

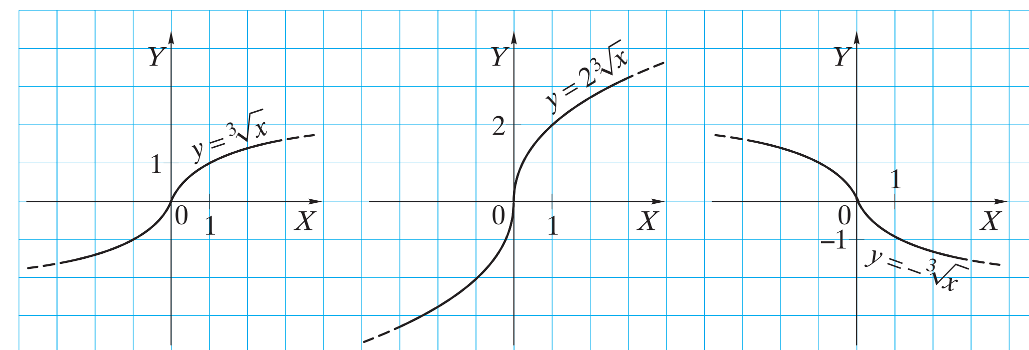
2. Naudodamiesi 1 uždavinio brėžiniais, nustatykite:

1) x reikšmes, su kuriomis teisingos lygybės:
a) $x^2 = x$, $\quad x^2 = \sqrt{x}$, $\quad \sqrt{x} = x$;
b) $-x^2 = -x$, $\quad -x^2 = -\sqrt{x}$, $\quad -\sqrt{x} = -x$.

2) sprendinius nelygybių:
a) $x^2 > x$, $\quad x^2 > \sqrt{x}$, $\quad x > \sqrt{x}$, $\quad x^2 \leqslant x$, $\quad x^2 \leqslant \sqrt{x}$, $\quad x \leqslant \sqrt{x}$;
b) $-x^2 > -x$, $\quad -x^2 > -\sqrt{x}$, $\quad -x > -\sqrt{x}$, $\quad -x^2 \leqslant -x$, $\quad -x^2 \leqslant -\sqrt{x}$, $-x \leqslant -\sqrt{x}$.

Reiškinys $f(x) = a\sqrt[3]{x}$

Paveikslėliuose pavaizduoti reiškinių $\sqrt[3]{x}$, $2\sqrt[3]{x}$, $-\sqrt[3]{x}$ grafikai.




O kaip suprasti $\sqrt[3]{x}$?

Panašiai, kaip $\sqrt{x}$!


Trečiojo laipsnio šaknis iš x-o yra toks skaičius, kurį pakėlę trečiuoju laipsniu, gauname x, t. y.:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x.$$

Pavyzdžiui:
- $\sqrt[3]{8} = 2$, nes $2^3 = 8$;
- skaičius, kurio trečiasis laipsnis lygus 2, yra $\sqrt[3]{2}$.

Uždaviniai

1. Apskaičiuokite reiškinio $f(x)$ reikšmes $f(27)$, $f(-64)$, $f\left(15\frac{5}{8}\right)$, $f\left(-2\frac{10}{27}\right)$, kai:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $\quad$ b) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$; $\quad$ c) $f(x) = 3\sqrt[3]{x}$; $\quad$ d) $f(x) = -3\sqrt[3]{x}$.

Su kuria x reikšme $f(x) = 0$? $f(x) = 3$? $f(x) = -3$?

2. a) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite grafikus $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ ir $y = x$. Pastebėkite, kad kubinės parabolės ir kubinės šaknies grafikai yra simetriški tiesės $y = x$ atžvilgiu.

b) Kokios tiesės atžvilgiu yra simetriški $y = -x^3$ ir $y = -\sqrt[3]{x}$ grafikai?

3. Nubraižykite reiškinio $f(x) = \sqrt[3]{x}$ grafiką ir, naudodamiesi juo, nubraižykite:

a) reiškinių $g(x) = f(x) + 3$ ir $h(x) = f(x) - 3$ grafikus;

b) reiškinių $k(x) = 3 \cdot f(x)$ ir $l(x) = \frac{1}{2}f(x)$ grafikus.

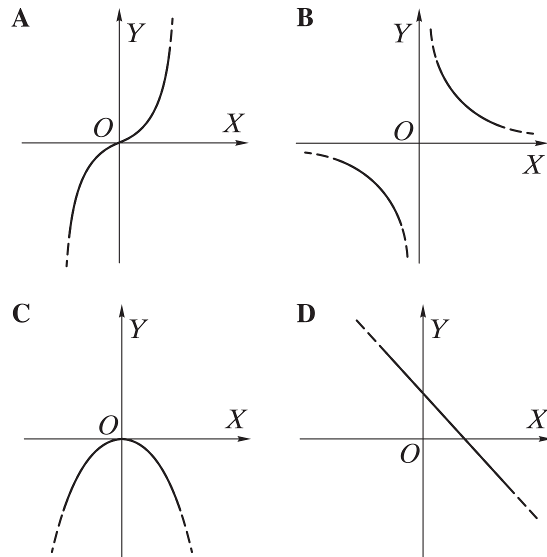
TESTAS

242. Kai $x = -3$, tai reiškinio $-x + 5x^2$ reikšmė lygi:
A 33 **B** 42 **C** 48 **D** -42

243. Duotas reiškinys $f(x) = \frac{1}{5}\sqrt{x}$. Apskaičiuokite $f(4)$.
A $\frac{2}{10}$ **B** $\frac{4}{5}$ **C** $-\frac{2}{5}$ **D** $\frac{2}{5}$

244. Kuris iš reiškinių tenkina sąlygą $f(-2) = 5$?
A $f(x) = 2x + 1$ **B** $f(x) = 2x + 9$
C $f(x) = -2x - 9$ **D** $f(x) = -x^2 + 1$

245. Paveikslėliuose pavaizduotos kreivės $y = -x + 3$, $y = 2x^3$, $y = -2x^2$, $y = \frac{6}{x}$.



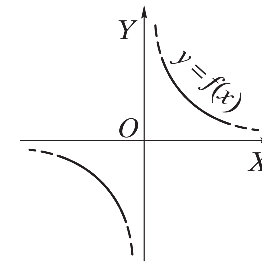
Kuriame paveikslėlyje kuri kreivė pavaizduota?

$y = -x + 3$	**A B C D**	$y = -2x^2$	**A B C D**
$y = 2x^3$	**A B C D**	$y = \frac{6}{x}$	**A B C D**

246. Kurio iš reiškinių grafikas yra tiesė?
A $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ **B** $f(x) = 3x^2 - 2$ **C** $f(x) = \frac{2}{x}$ **D** $f(x) = x^2$

247. Kuriuose koordinačių plokštumos ketvirčiuose yra reiškinio:
a) $-2x$ grafikas? **A** I ir III **B** II ir IV **C** I ir II **D** I ir IV
b) $2x + 2$ grafikas? **A** I ir III **B** I ir II **C** I, II ir III **D** Visuose
c) $5x^2$ grafikas? **A** III ir IV **B** II ir IV **C** I ir II **D** I ir III

248. Nubraižytas reiškinio $f(x) = \frac{a}{x}$ grafikas. Skaičius a yra:



A $a = 0$ **B** $a > 0$ **C** $a < 0$ **D** $a \geqslant 0$

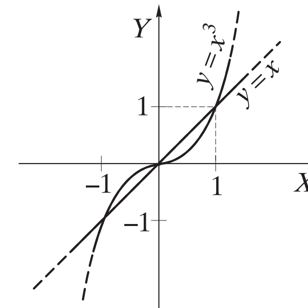
249. Kurio iš reiškinių $g(x) = \frac{x}{3}$, $h(x) = \frac{3}{x}$, $k(x) = 3x^2$ grafikas vadinamas hiperbole?
A $g(x)$ **B** $h(x)$ **C** $g(x)$ ir $h(x)$ **D** $k(x)$

250. Duotas reiškinys $f(x) = 2x - 1$. Su kuria x reikšme $f(x) = 11$?
A 5 **B** 6 **C** 5,5 **D** -6

251. Kuris taškas priklauso reiškinio $f(x) = -x^2 + 4$ grafikui?
A (1; 5) **B** (−1; 5) **C** (1; 3) **D** (−2; 8)

252. Kuris taškas priklauso reiškinio $f(x) = \frac{-2}{x}$ grafikui?
A $\left(x; \frac{2}{x}\right)$ **B** $\left(a; \frac{-2}{a}\right)$ **C** $\left(3; \frac{3}{2}\right)$ **D** $\left(-\frac{2}{x}; -x\right)$

253. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižyta tiesė $y = x$ ir kubinė parabolė $y = x^3$.



Naudodamiesi paveikslėliu, nustatykite:

1) kiek sprendinių turi lygtis $x^3 = x$;
A Du **B** Tris **C** Be galo daug **D** Nei vieno

2) lygties $x^3 = x$ sprendinius;
A -1 ir 1 **B** $(-\infty; 1]$ **C** -1; 0; 1 **D** 0

3) nelygybės $x^3 > x$ sprendinius;
A $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$ **B** $(-1; 0)$ **C** $(0; 1)$ **D** $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$

4) nelygybės $x^3 \leqslant x$ sprendinius.
A $(-\infty; -1]$ **B** $(-\infty; -1]$, $[0; 1]$ **C** $[0; 1]$ **D** $[1; +\infty)$

PASITIKRINAME

254. Apskaičiuokite $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$, kai reiškinys $f(x)$ yra:

a) $f(x)=5x+4$; b) $f(x)=\frac{x+3}{x-3}$; c) $f(x)=\frac{2x}{9-x^2}$.

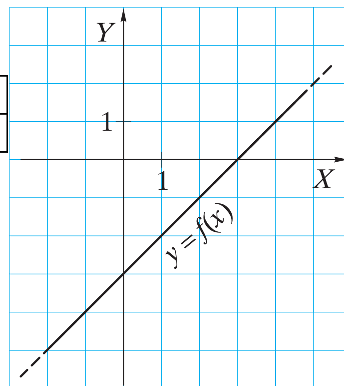
255. Duotas reiškinys $f(x)=5x-1$.

a) Apskaičiuokite $f(2)$; $f(-2)$; $f(0)$.
b) Apskaičiuokite x reikšmę, su kuria $f(x)=2$; $f(x)=-2$; $f(x)=0$.
c) Ar priklauso reiškinio grafikui taškas $A(-11;\,54)$? $B(0;\,2)$?

256. a) Ar taškai $A(2;\,-3)$, $B(-0{,}5;\,7)$, $C(1{,}4;\,-0{,}5)$, $D(-1{,}6;\,11{,}5)$ priklauso reiškinio $f(x)=5-4x$ grafikui?
b) Ar taškai $M(-1;\,0{,}5)$, $N(3;\,4)$, $P(-2{,}5;\,0{,}3)$, $T\left(\frac{1}{2};\,-1\right)$ priklauso reiškinio $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ grafikui?

257. Naudodamiesi reiškinio $f(x)$ grafiku, užpildykite lentelę:

$x=$	0	−1	5	−2				
$f(x)=$					1	0	−1	−2



a) Nurodykite koordinates taškų, kuriuose grafikas kerta koordinačių ašis.
b) Su kuria x reikšme $f(x)=0$?
c) Su kuriomis x reikšmėmis $f(x)>0$?
d) Su kuriomis x reikšmėmis $f(x)\leqslant 0$?

258. Kvadrato kraštinė lygi x cm.

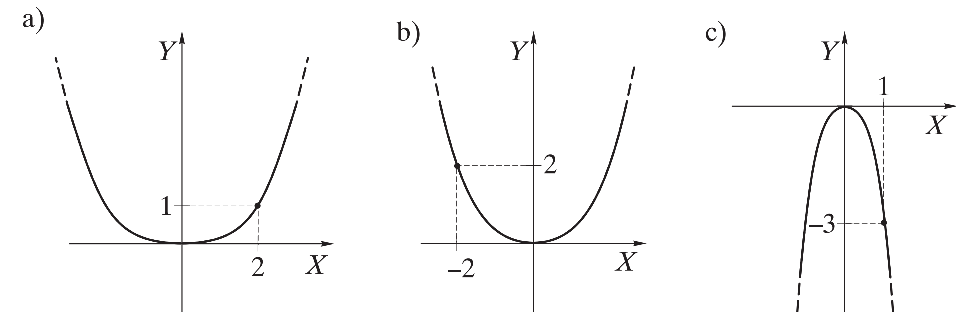
1) Įrodykite, kad kvadrato įstrižainės ilgį d galima apskaičiuoti pagal formulę $d(x)=\sqrt{2}x$.
2) Apskaičiuokite $d(4)$; $d(2\sqrt{2})$.
3) Kam lygi kvadrato kraštinė, jei jo įstrižainės ilgis yra $\sqrt{18}$ cm?

259. Nubraižykite reiškinio $f(x)$ grafiką, kai:

a) $f(x)=-3x$; b) $f(x)=x-4$; c) $f(x)=3$;
d) $f(x)=\frac{1}{3}x$; e) $f(x)=2x-1$; f) $f(x)=-2$.

260. a) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite reiškinių $f(x)=\frac{8}{x}$ ir $g(x)=3x$ grafikus. Raskite grafikų susikirtimo taškų apytiksles koordinates.
b) Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite reiškinių $f(x)=-\frac{4}{x}$ ir $g(x)=-\frac{1}{4}x$ grafikus. Raskite grafikų susikirtimo taškų apytiksles koordinates.

261. Užrašykite reiškinį $f(x)=ax^2$, kurio grafikas yra nubraižytoji parabolė.



262. Reiškinio $f(x)=k\cdot x^3$ grafikas eina per tašką $M(2;\,4)$. Raskite skaičiaus k reikšmę.

263. Nubraižykite reiškinio $f(x)$ grafiką.

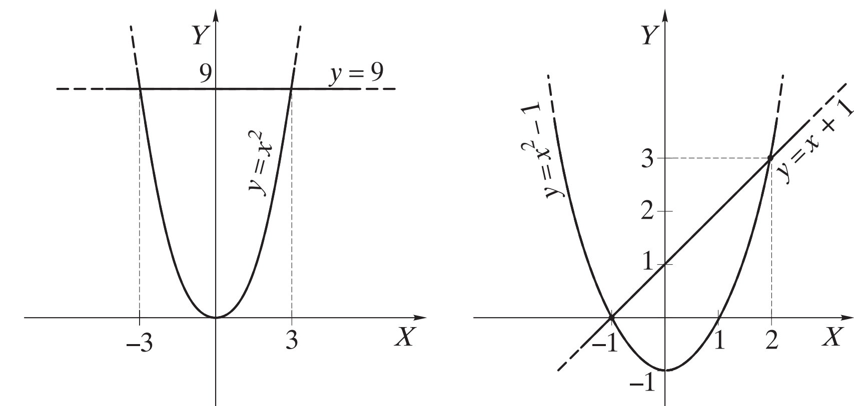
a) $f(x)=0{,}5x^3$; b) $f(x)=-\frac{1}{2}x^3$.

264. Pabaikite sakinį.

a) Reiškinio $f(x)=ax^3$, kai $a>0$, grafikas išsidėstęs ... ketvirčiuose.
b) Reiškinio $g(x)=ax^3$, kai $a<0$, grafikas ....

265. Paveikslėlyje nubraižyti dviejų reiškinių grafikai. Naudodamiesi paveikslėlio duomenimis, nustatykite sprendinius:

a) lygties $x^2=9$; nelygybės $x^2>9$;
b) lygties $x^2-1=x+1$; nelygybės $x^2-1\leqslant x+1$.



266. Grafiškai išspręskite lygtį:

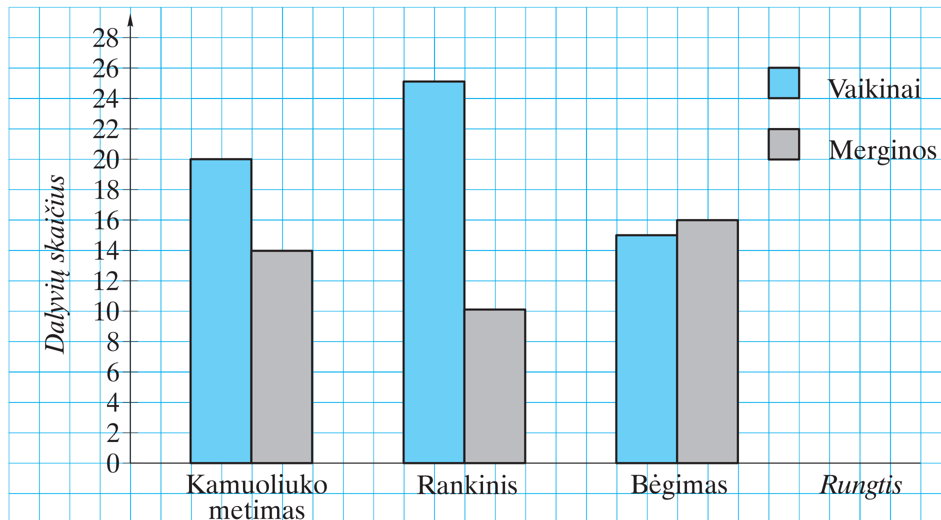
a) $2x^2=5x-2$; b) $x^2=6-x$; c) $-x^2=\frac{8}{x}$; d) $x^3=\frac{2}{x}$.

267. Grafiškai išspręskite nelygybę:

a) $x^2<2x+3$; b) $-x^3>x$; c) $-x^2\geqslant x^3$.

KARTOJAME

268. Sulpelinė diagrama vaizduoja, kiek vaikinų ir kiek merginų dalyvavo sporto dienos rungtyse. Kiekvienas dalyvis varžėsi tik vienoje rungtyje.



1) Nustatykite sporto dienoje dalyvavusių merginų skaičių.
2) Kiek procentų visų sporto dienoje dalyvavusių merginų žaidė rankinį?
3) Nustatykite, kokiu santykiu vaikinų skaičius pasiskirstė kamuoliuko metimo, rankinio ir bėgimo rungtyse.
4) Nubraižykite skritulinę diagramą, rodančią vaikinų pasiskirstymą sporto dienos rungtyse. Diagramos išpjovose užrašykite, kurią dalį procentais viso skritulio užima kiekviena išpjova.

269. Greito maitinimo restorane galima užsisakyti sumuštinius su sūriu ir sumuštinius su mėsa. Užsisakydamas sumuštinį, klientas renkasi duonos rūšį ir sūrio arba mėsos rūšį.

DUONA	SŪRIS	MĖSA
Kvietinė	Varškės	Vištiena
Ruginė	Fermentinis	Jautiena
		Kiauliena

1) Apskaičiuokite, kiek skirtingų rūšių sumuštinių galima užsisakyti.
2) Apskaičiuokite, kiek galima užsisakyti skirtingų sumuštinių su rugine duona.
3) Vitrinoje parodyti visų rūšių sumuštiniai. Atsitiktinai pasirenkamas vienas sumuštinis. Kuris įvykis — A ar B — yra labiau tikėtinas?
A — pasirinktas sumuštinis su sūriu;
B — pasirinktas sumuštinis su mėsa.

PRISIMENAME TAI, KO PRIREIKS KITAME SKYRIUJE

270. Nespręsdami lygties, o tikrindami kiekvieną iš skaičių -4; -2; -1; 0; 2; 3; 4; 10, nustatykite, kurie iš jų yra duotosios lygties sprendiniai.

a) $5x - 8 = 2$; b) $\frac{1}{5}x + 1 = 3$; c) $3(x + 1) = -9$;
d) $(x + 2)(x - 3) = 0$; e) $x^2 + x = 0$; f) $x^2 - 16 = 0$.

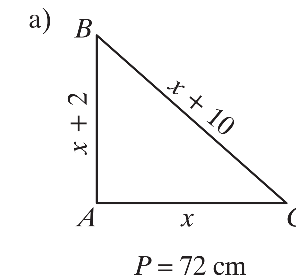
271. Raskite kiekvienos lygties sprendinius.

a)	b)	c)
$(x - 3)(x - 4) = 0$,	$x^2 - 5x = 0$,	$x^2 - 9 = 2$,
$x(x + 2) = 0$,	$2x^2 + 6x = 0$,	$4x^2 - 64 = 2$,
$3x(2 - x) = 0$,	$x^2 = \frac{3}{4}x$,	$3x^2 = 27$,
$(-4x + 2)(4x - 1) = 0$;	$x^2 = -3{,}2x$;	$x^2 - 81 = 0$.

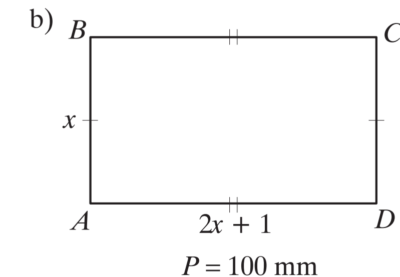
272. Matas turėjo 4,5 Lt, o Andrius — 3 Lt. Matas išleido du kartus daugiau pinigų negu Andrius. Paaiškėjo, kad Matui liko pusė tos sumos, kuri liko Andriui. Kiek pinigų išleido Matas ir kiek Andrius?

273. Jeigu sudėsime $\frac{1}{2}$ lyginio skaičiaus ir $\frac{2}{3}$ po jo einančio lyginio skaičiaus, tai gausime 27. Koks nelyginis skaičius yra tarp šių, vienas po kito einančių lyginių skaičių?

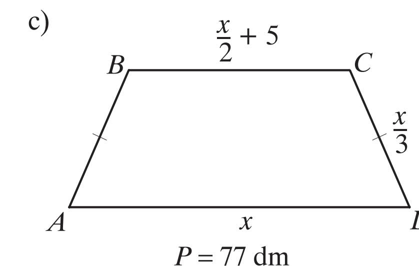
274. Sudarykite lygtį pavaizduotos figūros perimetrui apskaičiuoti ir, ją išsprendę, apskaičiuokite figūros kraštinių ilgius centimetrais.

a)


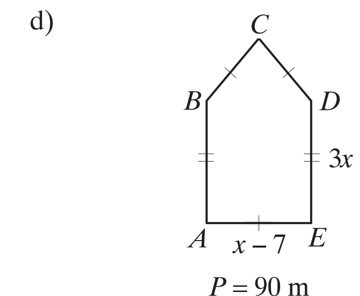
$P = 72$ cm

b)


$P = 100$ mm

c)


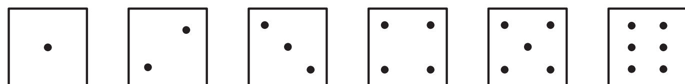
$P = 77$ dm

d)


$P = 90$ m

Du kauliukai

Jonas meta du standartinius šešiasienius lošimo kauliukus. Tų kauliukų sienelėse sužymėtos akutės.



Vienas kauliukas yra baltas, kitas — juodas.

1 UŽDAVINYS. Keliomis akutėmis į viršų galėjo atvirsti baltas kauliukas ir keliomis — juodas, jei žinoma, kad tų akučių suma lygi 6?

? + ? = 6

2 UŽDAVINYS. Keliomis akutėmis į viršų galėjo atvirsti baltas kauliukas ir keliomis — juodas, jei žinoma, kad iš balto kauliuko akučių skaičiaus atėmę juodo kauliuko akučių skaičių, gauname 2?

? − ? = 2

3 UŽDAVINYS. Keliomis akutėmis į viršų galėjo atvirsti baltas kauliukas ir keliomis — juodas, jei žinoma, kad abiejų kauliukų atvirtusių akučių suma lygi 6, o iš balto kauliuko akučių skaičiaus atėmę juodo kauliuko akučių skaičių, gauname 2?

? + ? = 6 ,   ? − ? = 2

Aš balto kauliuko atvirtusių akučių skaičių pažymėjau x.
Tada juodo kauliuko atvirtusių akučių skaičius lygus $6 - x$.
Iš lygybės $x - (6 - x) = 2$ apskaičiavau x.

O aš baltojo kauliuko atvirtusių akučių skaičių pažymėjau x, juodojo — y ir sudariau dvi lygtis. Surašęs jas kartu, gavau lygčių sistemą:

$\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2. \end{cases}$ Tada radau tų lygčių bendrąjį sprendinį (lygčių sistemos sprendinį).

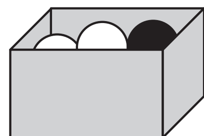
Šiame skyriuje ir nagrinėsime tiesinių lygčių sistemas.

Šiame skyriuje susipažinsime su lygtimis, kuriose yra du nežinomieji.

- Svarbiausias šio skyriaus tikslas yra išmokti spręsti dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas.
- Sužinosime, kad sistemas galima spręsti:
  - braižant sistemos lygčių grafikus;
  - išsireiškiant kurį nors lygties nežinomąjį;
  - sudedant (atimant) lygtis.
- Spręsime tekstinius uždavinius sudarydami lygčių sistemas.

4.1. LYGTIS SU DVIEM NEŽINOMAISIAIS

Dėžėje yra rutuliai. Kiekvienas rutulys yra arba baltas, arba juodas.



Užduotis. Žinoma, kad toje dėžėje iš viso yra 6 rutuliai.

1) Pildydami lentelę, surašykite, kiek kokios spalvos rutulių gali būti dėžėje.

Balti	0	1					
Juodi	6	5					

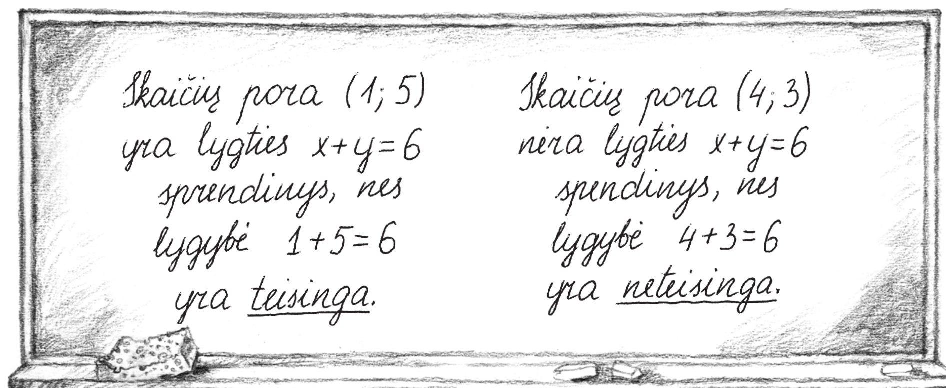
Dėžėje gali būti: 0 baltų ir 6 juodi rutuliai $(0 + 6 = 6)$;
1 baltas ir 5 juodi rutuliai $(1 + 5 = 6)$;
⋮

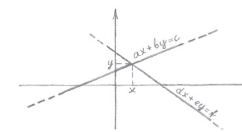
2) Dėžėje esančių baltų rutulių skaičių pažymėkite raide x, o juodų rutulių skaičių — raide y. Užrašykite lygybę, atitinkančią aprašytą situaciją.

$\underbrace{x + y}_{\text{Balti+Juodi}} = 6$. Šioje lygybėje yra du nežinomieji (x ir y). Todėl ji vadinama lygtimi su dviem nežinomaisiais.

3) Surašykite lygties $x + y = 6$ visus neneigiamus sveikuosius sprendinius.

Lygties su dviem nežinomaisiais $x + y = 6$ sprendiniai yra tos x ir y reikšmių poros $(x; y)$, su kuriomis lygtis virsta teisinga lygybe.
Lygties $x + y = 6$ neneigiami sveikieji sprendiniai: $(0; 6)$, $(1; 5)$, ...





275. Patikrinkite, ar lygties $x + 2y = 10$ sprendinys yra skaičių pora:
a) $x = 2,\ y = 4$; b) $x = 0,\ y = 5$; c) $x = 10,\ y = 0$;
d) $x = 4,\ y = 4$; e) $x = 3,\ y = 1$; f) $x = 6,\ y = 2$.

276. Patikrinkite, ar lygties $2x - y = 5$ sprendinys yra skaičių pora:
a) $x = 4,\ y = 3$; b) $x = -2,\ y = 1$; c) $x = 0,\ y = -5$;
d) $x = 3,\ y = -1$; e) $x = 5,\ y = 5$; f) $x = -4,\ y = -3$.

277. Kurios skaičių poros $(0; 6)$, $(2; 0)$, $(3; 3)$, $(-3; -3)$, $(-2; 12)$ yra lygties $3x + y = 6$ sprendiniai?

278. Kurios iš skaičių porų $(7; 0)$, $(3; 1)$, $(1; 3)$, $(-1; 2)$ yra lygties $x + 4y = 7$ sprendiniai?

279. Baikite pildyti lentelę, surašydami visus neneigiamus sveikuosius lygties $x + y = 7$ sprendinius.

$x =$	0							
$y =$	7							

280. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras, kurios yra lygties $x + y = 7$ sprendiniai, ir užrašykite jas pavidalu $(x; y)$.

281. Raskite visus neneigiamus sveikuosius lygties $x + y = 8$ sprendinius.

282. Ar skaičių pora $(2; 5)$ yra duotosios lygties sprendinys?
a) $x + y = 7$; b) $2x - y = 1$; c) $3x + y = 11$;
d) $3x - y = 1$; e) $10x - y = 15$; f) $x - 10y = 50$.

283. Simona 20 litų planuoja išleisti sąsiuviniams pirkti. Ji ketina pirkti dviejų rūšių sąsiuvinius — plonus ir storus. Vienas plonas sąsiuvinis kainuoja 1 litą, o vienas storas — 2 litus. Kiek ir kokių sąsiuvinių už 20 litų gali nusipirkti Simona?

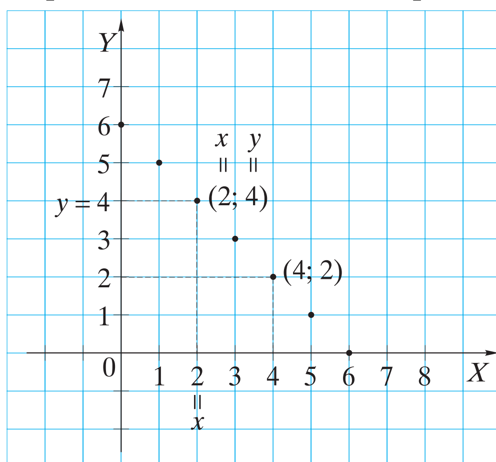
- Plonų sąsiuvinių skaičių pažymėkite raide x.
- Storų sąsiuvinių skaičių pažymėkite raide y.
- Sudarykite lygtį su dviem nežinomaisiais (x ir y).
- Raskite tos lygties natūraliuosius sprendinius.
- Atsižvelgę į uždavinio sąlygą, parašykite atsakymą.

4.2. LYGTIES $ax + by = c$ GRAFIKAS

Surašykime lygties $x + y = 6$ sveikuosius neneigiamus sprendinius:

$$(0; 6), \quad (1; 5), \quad (2; 4), \quad (3; 3), \quad (4; 2), \quad (5; 1), \quad (6; 0).$$

Visus tuos sprendinius pavaizduokime koordinačių plokštumos taškais.

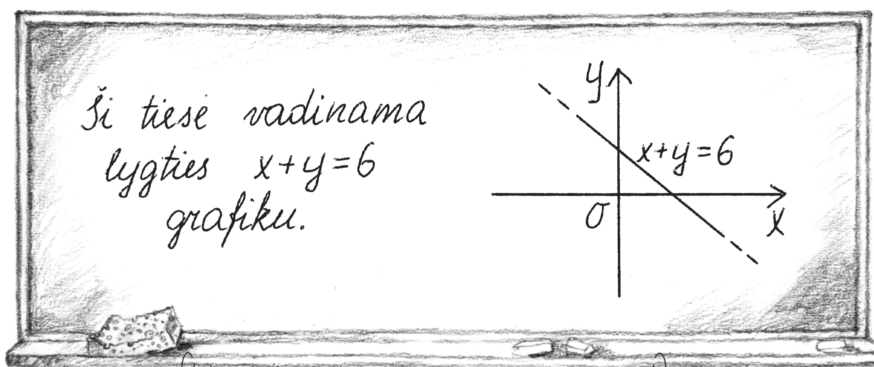


Užduotis. Raskite dar bent 4 lygties $x + y = 6$ sprendinius.

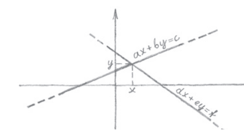
1) Laisvai pasirinkite x reikšmes, o jas atitinkančias y reikšmes apskaičiuokite.

Kai: $x = -1$, tai $-1 + y = 6$, $y = 7$; $(-1; 7)$
$x = 2{,}5$, tai $2{,}5 + y = 6$, $y = 3{,}5$; $(2{,}5; 3{,}5)$
⋮

2) Surastus sprendinius pavaizduokite koordinačių plokštumoje taškais $(x; y)$. Jei viską atlikote teisingai, tai gavote, kad visi taškai $(x; y)$, kurių koordinatės yra lygties $x + y = 6$ sprendiniai, yra išsidėstę toje pačioje tiesėje. Nubrėžkite tą tiesę.



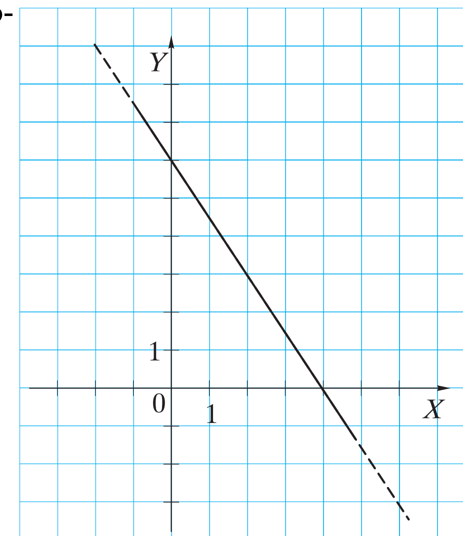
Lygtis $x + y = 6$ vadinama *tiesinė*, nes jos sprendinius atitinkantys koordinačių plokštumos taškai išsidėstę tiesėje.



284. Surašykite visus neneigiamus sveikuosius lygties $x + y = 4$ sprendinius ir pavaizduokite juos koordinačių plokštumoje taškais $(x; y)$. Nubrėžkite tiesę, kurioje yra išsidėstę visi šios lygties sprendinius atitinkantys taškai.

285. Koordinačių plokštumoje pavaizduota tiesė, kurios visų taškų koordinatės $(x; y)$ yra tam tikros lygties su dviem nežinomaisiais (x ir y) sprendiniai. Iš grafiko nustatykite, ar tos lygties sprendinys yra skaičių pora:

a) $(0; 6)$; b) $(4; 0)$;
c) $(3; 2)$; d) $(2; 3)$;
e) $(5; -1)$; f) $(-2; 8)$.



286. Raskite keturis lygties su dviem nežinomaisiais sprendinius, kai duota viena vieno nežinomojo reikšmė.

a) $x + 2y = 4$;

$x =$	0		2	6
$y =$		0		

b) $x - 3y = 6$;

$x =$	0		3	
$y =$		0		2

c) $5x + 2y = 10$.

$x =$	0			10
$y =$		0	10	

287. Raskite du lygties sprendinius ir nubrėžkite tiesę, kurioje yra visi tos lygties sprendiniai, kai lygtis yra:

a) $x + y = 7$; b) $x - y = 4$; c) $2x + y = 6$; d) $2x - y = 4$.

Visi lygties $ax + by = c$ (a, b, c — skaičiai) sprendiniai išsidėstę tiesėje. Nubrėžti tą tiesę galima suradus du lygties sprendinius $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ ir juos pažymėjus koordinačių plokštumoje taškais.

288. Nubrėžkite lygties grafiką (tiesę, kurioje išsidėstę visi lygties sprendinius atitinkantys koordinačių plokštumos taškai), kai lygtis yra:

a) $x + y = 3$; b) $2x + 3y = 6$; c) $x - 2y = 5$; d) $3x - y = 9$.

289. Nebrėždami lygties grafiko, nustatykite, ar jis eina per tašką $(1; 4)$.

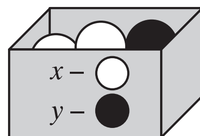
a) $x + y = 5$; b) $5x - y = 1$; c) $2x + y = 7$; d) $3x + 2y = 11$.

290. Vienoje koordinačių plokštumoje nubraižykite abiejų duotųjų lygčių grafikus ir nustatykite jų susikirtimo taško koordinates.

a) $x + y = 8$ ir $x - y = 2$; b) $2x - y = 3$ ir $2x + y = 1$.

4.3. LYGČIŲ SISTEMA

Prisiminkime dėžę su rutuliais, kurių kiekvienas yra arba baltas, arba juodas. Baltų rutulių skaičių pažymėkime raide x, o juodų — raide y.



1 užduotis. Yra žinoma, kad, sudėję dėžėje esančius baltų ir juodų rutulių skaičius, gauname 6. Kiek baltų ir kiek juodų rutulių gali būti dėžėje?

$$\underbrace{x + y}_{\text{Balti+Juodi}} = 6$$

Lygtis $x + y = 6$ turi 7 sveikuosius sprendinius.

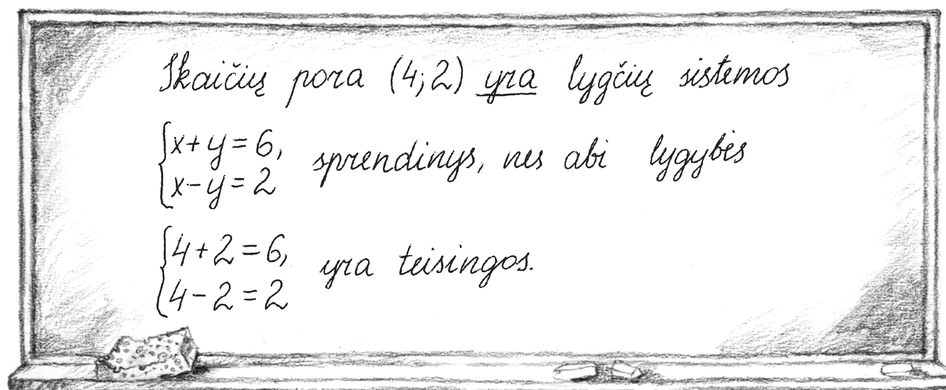
2 užduotis. Yra žinoma, kad iš dėžėje esančių baltų rutulių skaičiaus atėmę juodų rutulių skaičių, gauname 2. Kiek baltų ir kiek juodų rutulių gali būti dėžėje?

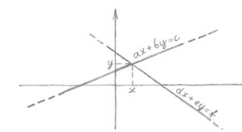
$$\underbrace{x - y}_{\text{Balti−Juodi}} = 2$$

Lygtis $x - y = 2$ turi be galo daug sveikųjų sprendinių.

3 užduotis. O dabar abi užduotis (1 ir 2) „sujunkime“.
Yra žinoma, kad dėžėje esančių baltų ir juodų rutulių skaičių suma lygi 6, o iš baltų rutulių skaičiaus atėmę juodų rutulių skaičių, gauname 2. Kiek baltų ir kiek juodų rutulių yra dėžėje?

Kai ieškome lygčių $x + y = 6$ ir $x - y = 2$ ***bendrųjų*** sprendinių, tai sakome, kad ieškome tų ***lygčių sistemos*** sprendinių.
Rašome: $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2. \end{cases}$





291. Žinoma, kad skaičių pora (1; 2) yra lygčių $x + y = 3$ ir $2x - y = 0$ sprendinys. Ar skaičių pora (1; 2) yra lygčių sistemos $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ sprendinys? Atsakymą pagrįskite.

292. Skaičių pora (3; 5) yra lygties $2x + y = 11$ sprendinys. Ar ši skaičių pora yra lygčių sistemos $\begin{cases} 2x + y = 11, \\ x + y = 3 \end{cases}$ sprendinys? Paaiškinkite kodėl.

293. Skaičių pora (10; 4) yra lygties $x - y = 6$ sprendinys. Ar ši skaičių pora yra lygčių sistemos $\begin{cases} x - y = 6, \\ x + y = 16 \end{cases}$ sprendinys? Atsakymą pagrįskite.

294. 1) Patikrinkite, ar skaičių pora (2; 3) yra lygties $x + y = 5$ sprendinys.
2) Patikrinkite, ar ta skaičių pora yra lygties $2x - 3y = -5$ sprendinys.
3) Nustatykite, ar ta skaičių pora yra lygčių sistemos $\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$ sprendinys.

295. Ar lygčių sistemos $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ sprendinys yra skaičių pora:
a) (3; 1)? b) (5; 0)? c) (3; 2)?

296. Kuri skaičių pora — (2; 6) ar (−4; 0) — yra lygčių sistemos sprendinys?
a) $\begin{cases} 3x - y = 0, \\ 5x - y = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = -4, \\ 2x + y = -8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = -4, \\ 3x - 2y = -12. \end{cases}$

297. Kokie skaičiai turi būti parašyti vietoj kvadratėlių, jei žinoma, kad skaičių pora (0; 7) yra lygčių sistemos sprendinys?
a) $\begin{cases} x + y = \square, \\ y - x = \square; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 2y = \square, \\ x + 3y = \square; \end{cases}$ c) $\begin{cases} -3x - 3y = \square, \\ -x + 5y = \square. \end{cases}$

298. Sudarykite dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą, kurios sprendinys būtų skaičių pora:
a) (0; 5); b) (3; 6); c) (−4; 2); d) (2; 2); e) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$.

299. Sudarykite lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą, atitinkančią aprašytą situaciją.
a) Dėžėje yra balti ir juodi rutuliai. Iš viso dėžėje yra 12 rutulių. Baltų rutulių yra 6 daugiau nei juodų.
b) Dėžėje yra balti ir juodi rutuliai. Iš viso dėžėje yra 24 rutuliai. Baltų rutulių yra 8 mažiau nei juodų.
c) Dviejų skaičių suma lygi 35, o jų skirtumas lygus 12.
d) Dviejų skaičių suma lygi 27. Vienas iš skaičių 7 vienetais mažesnis už kitą.

4.4. LYGČIŲ SISTEMOS GRAFINIS SPRENDIMAS

Užduotis. Lygčių sistemos

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2 \end{cases}$$

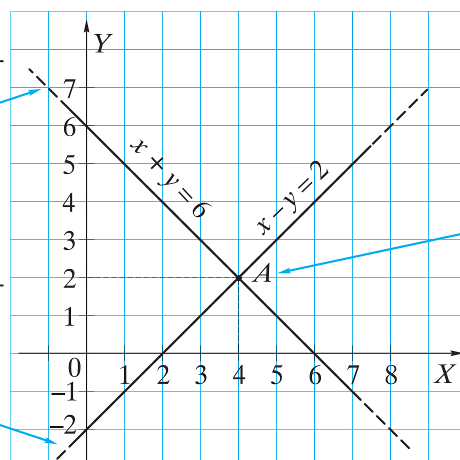
sprendinį nustatykite braižydami lygčių grafikus.

1) Koordinačių plokštumoje nubrėžkite pirmosios lygties ($x + y = 6$) grafiką (tiesę).

2) Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubrėžkite antrosios lygties ($x - y = 2$) grafiką (tiesę).

Tos tiesės taškų koordinatės yra lygties $x + y = 6$ sprendiniai.

Tos tiesės taškų koordinatės yra lygties $x - y = 2$ sprendiniai.

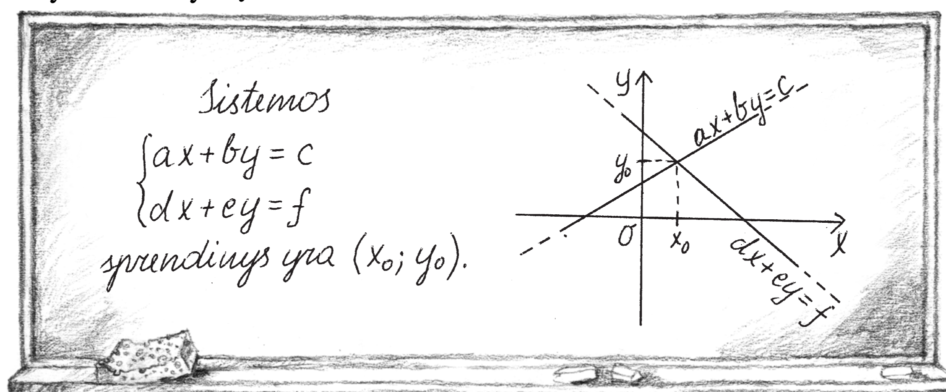


Taško A koordinatės yra lygčių sistemos $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2 \end{cases}$ sprendinys.

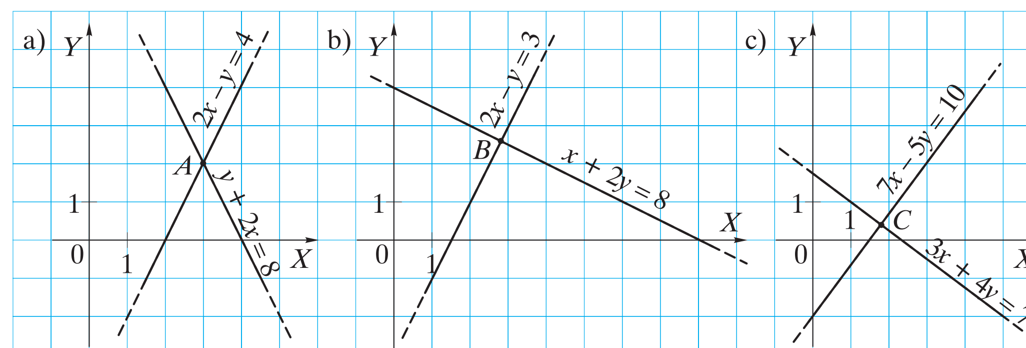
3) Raskite abiejų grafikų (tiesių) ***bendro*** taško koordinates.

4) Patikrinkite, ar to taško koordinatės tenkina abi sistemos lygtis.

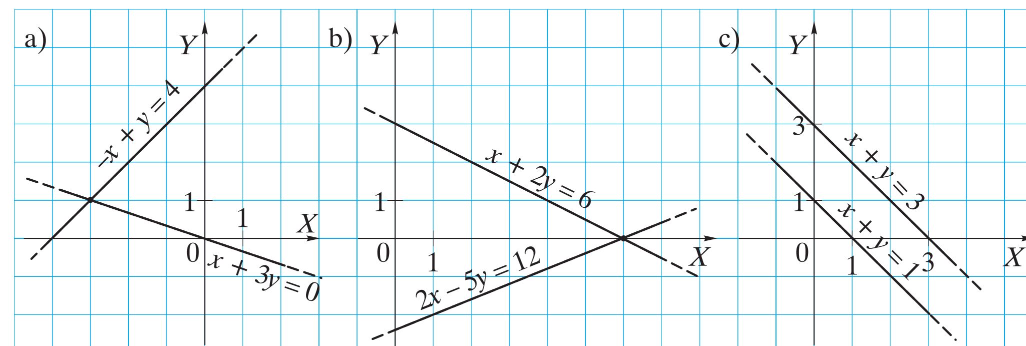
5) Parašykite atsakymą.



300. Iš brėžinio nustatykite tiesių susikirtimo taško koordinates.



301. 1) Parašykite lygčių sistemą, kuri atitiktų brėžinį.



2) Nustatykite a) ir b) sistemų sprendinius.
3) Ar turi sprendinį sistema c)?

302. Be brėžinio nustatykite:
1) ar lygčių $x - 2y = 3$ ir $2x - 3y = 8$ grafikai eina per tašką $A(7; 2)$;
2) ar lygčių $x - 2y = 3$ ir $2x - 3y = 8$ grafikai eina per tašką $B(1; -1)$;
3) kuris iš taškų (A ar B) yra lygčių sistemos $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$ sprendinys.

303. Nubrėžkite abiejų lygčių grafikus (tieses) ir raskite jų susikirtimo taško koordinates.
a) $x + 2y = -9$ ir $x - y = 6$; b) $x + y = 6$ ir $y = 2x$.

304. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą, braižydami sistemos lygčių grafikus.

a) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x - y = -3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y + x = 0, \\ 3x + y = 3; \end{cases}$ d) $\begin{cases} y - x = 5, \\ -x + y = 3. \end{cases}$

4.5. LYGČIŲ SISTEMOS SPRENDIMAS KEITIMO BŪDU

Užduotis. Lygčių sistemos

$$\begin{cases} x+y=6, & (1)\\ x-y=2 & (2)\end{cases}$$

sprendinį apskaičiuokite vieną nežinomąjį keisdami kitu nežinomuoju.

1) Iš (1) lygties išreikškite x-ą.

2) Gautąją išraišką (3) įstatykite į (2) lygtį.

3) Išspręskite gautąją lygtį su vienu nežinomuoju.

4) Gautąją y reikšmę įstatykite į kurią nors iš lygčių (1), (2) ar (3) — geriausia į (3) — ir apskaičiuokite x reikšmę.

5) Patikrinkite, ar gautoji x ir y reikšmių pora yra sistemos sprendinys, t. y. ar ji tenkina abi sistemos lygtis.

1) O aš iš (1) lygties išreikšiu y-ą.
$x+y=6 \quad \Rightarrow \quad y=6-x \quad (3)$

2) (3)→(2): $x-(6-x)=2$

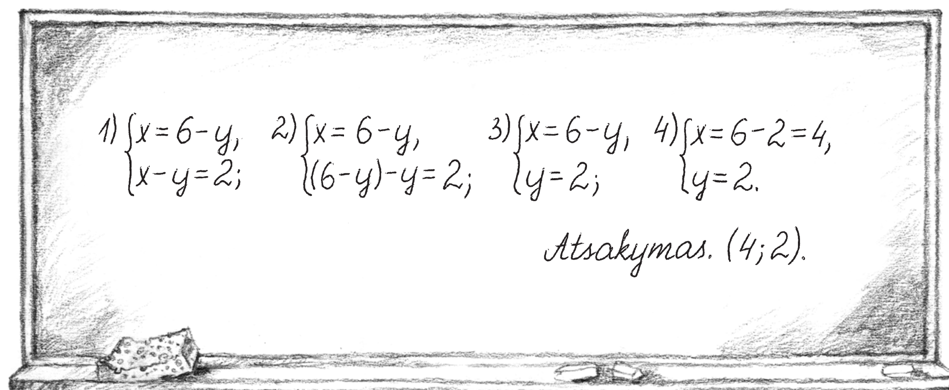
3) $x-(6-x)=2,$
$x-6+x=2,$
$2x-6=2,$
$2x=8,$
$\underline{x=4}.$

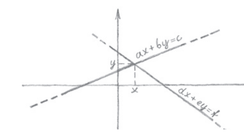
4) Kadangi $x=4$, tai iš $y=6-x$ gauname $y=6-4$, $\underline{y=2}$.

5) Pasitikriname:
$$\begin{cases} 4+2=6 & \text{— lygybė teisinga;}\\ 4-2=2 & \text{— lygybė teisinga.}\end{cases}$$



6) Parašykite atsakymą.





305. Išspręskite lygčių sistemą keitimo būdu.
a) $\begin{cases} y=2x+3,\\ 3x+y=13;\end{cases}$ b) $\begin{cases} y=3x+2,\\ 2y-5x=7;\end{cases}$ c) $\begin{cases} x=2-y,\\ 3x+4y=7;\end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-y=0,\\ y=x+1.\end{cases}$

306. Išreikškite nežinomąjį y nežinomuoju x.
a) $y-4x=5$; b) $2x-y=3$; c) $3x+2y=6$.

307. Išreikškite nežinomąjį x nežinomuoju y.
a) $x+2y=7$; b) $-x+4y=8$; c) $y-x=2$.

308. Išreiškę vienos lygties vieną nežinomąjį kitu, išspręskite lygčių sistemą.
a) $\begin{cases} x+y=5,\\ x-y=1;\end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y=11,\\ 3x-y=1;\end{cases}$ c) $\begin{cases} y-2x=1,\\ 6x+y=9;\end{cases}$
d) $\begin{cases} 3x-4y=5,\\ x+7y=10;\end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-3y=-9,\\ 3x-y=4;\end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x+y=0,\\ x+2y=-7.\end{cases}$

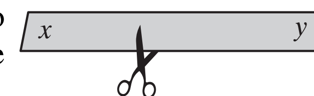
309. Duotos dvi lygtys su dviem nežinomaisiais x ir y.
a) $y=x-1$ ir $y=3x+3$; b) $y=-2x$ ir $y=6-x$.
Nebraižydami tų lygčių grafikų, raskite jų susikirtimo taško koordinates.

Išspręskite **310–315** uždavinius, sudarydami tiesinių lygčių sistemas.

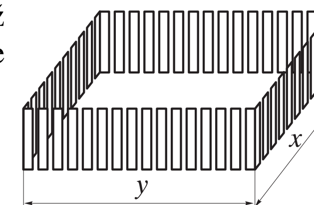
310. Prie skaičiaus x pridėję skaičių y, gauname 19. Iš skaičiaus x atėmę skaičių y, gauname 5. Raskite skaičius x ir y.

311. Skaičius x yra 8 vienetais mažesnis už skaičių y. Šių skaičių suma lygi 8. Raskite tuos skaičius.

312. 40 cm ilgio juostelė perkirpta į dvi dalis. Kokio ilgio tos dalys, jei ilgesnioji dalis 16 cm ilgesnė už trumpesniąją?



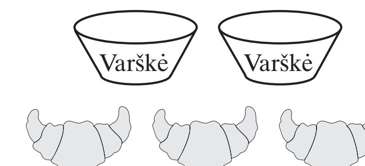
313. Stačiakampio sklypo ilgis 3 kartus didesnis už jo plotį. Sklypo tvoros ilgis 120 m. Raskite sklypo matmenis.



314. Vienas iš gretutinių kampų 4 kartus didesnis už kitą. Raskite šių kampų dydžius.



315. Du tokie patys indeliai varškės ir 3 vienos rūšies bandelės kainuoja 10 litų. Indelis varškės 2 litais brangesnis už bandelę. Kiek kainuoja indelis varškės ir kiek — bandelė?



4.6. LYGČIŲ SISTEMOS SPRENDIMAS SUDĖTIES BŪDU

Užduotis. Lygčių sistemos

$$\begin{cases} x + y = 6, & (1) \\ x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

sprendinį apskaičiuokite sudėdami lygtis.

1) Abi sistemos lygtis sudėkite panariui.

2) Išspręskite gautąją lygtį.

3) Įstatykite gautąją nežinomojo reikšmę į kurią nors sistemos lygtį.

4) Iš gautosios lygties su vienu nežinomuoju apskaičiuokite to nežinomojo reikšmę.

5) Pasitikrinkite, ar gautosios x ir y reikšmės yra sistemos sprendinys.

1) O aš iš (1) lygties *atimsiu* (2) lygtį:

$$-\begin{array}{r} x + y = 6 \\ \underline{x - y = 2} \\ 2y = 4 \end{array}$$

2) $2y = 4$,
$\underline{y = 2}$.

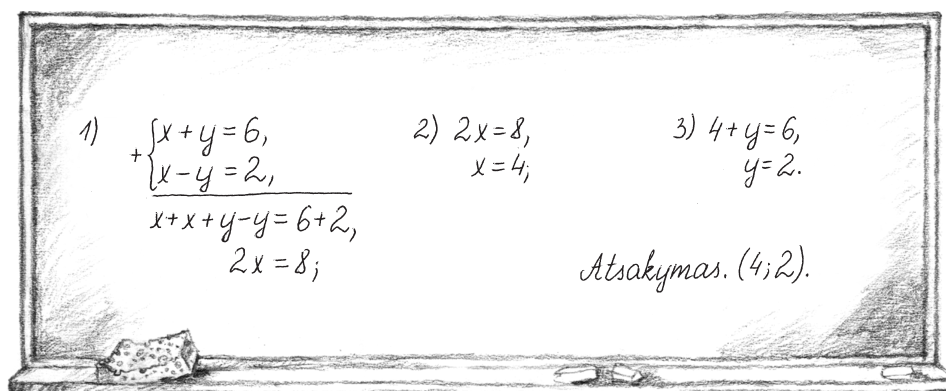
3) Kadangi $y = 2$, tai iš $x + y = 6$ gauname $x + 2 = 6$.

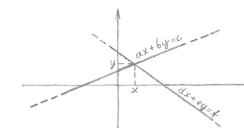
4) $x + 2 = 6$,
$\underline{x = 4}$.

5) Pasitikriname:

$$\begin{cases} 4+2=6 & \text{— lygybė teisinga;} \\ 4-2=2 & \text{— lygybė teisinga.} \end{cases}$$

6) Parašykite atsakymą.





316. Išspręskite lygčių sistemą sudėties būdu.

a) $\begin{cases} 2x + y = 12, \\ 3x - y = 8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 5y = 8, \\ 2x + 5y = 16; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ 6x - 3y = 21; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 21, \\ -2x + 4y = 14; \end{cases}$ e) $\begin{cases} -6x + 2y = -12, \\ 6x - 4y = 0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x + 4y = 6, \\ 2y - 3x = 12; \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x + y = -8, \\ 3x - y = -7; \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x + 2y = 13, \\ x - 2y = 7; \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2y - x = 1, \\ x + 3y = 14. \end{cases}$

317. Išspręskite lygčių sistemą sudėties būdu. Pirmiausia vieną sistemos lygtį padauginkite iš tokio skaičiaus, kad koeficientai prie x arba prie y būtų vienas kitam priešingi skaičiai.

a) $\begin{cases} 4x + 5y = -1, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ x + 6y = 16; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x + 2y = 11, \\ 10x + y = 13. \end{cases}$

Išspręskime sudėties būdu sistemą $\begin{cases} 5x - 2y = 8, & (1) \\ 3x - 4y = 2. & (2) \end{cases}$

Sprendimas. 1) Padauginkime (1) lygtį iš -2:

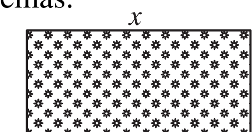
$5x - 2y = 8 \quad \big| \cdot (-2) \to -10x + 4y = -16.$

2) Gautąją lygtį sudėkime su (2) lygtimi:

$+\begin{cases} -10x + 4y = -16 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \to -7x = -14$ ir t. t.

Išspręskite **318–323** uždavinius, sudarydami lygčių sistemas.

318. Stačiakampio formos gėlyno perimetras yra 27 metrai. Jo ilgis 3 metrais didesnis už dvigubą plotį. Kokie sklypo matmenys?



319. Už 4 vienodus tušinukus ir 3 sąsiuvinius Rita sumokėjo 11 litų. Romas už 2 tokius pačius tušinukus ir 2 sąsiuvinius sumokėjo 6 litus. Kiek kainuoja vienas tušinukas ir kiek — vienas sąsiuvinis?

320. Mokyklos dailės kabinetui buvo nupirkta 12 rinkinių akvarelinių dažų ir 5 rinkiniai guašo. Už pirkinį sumokėta 112 litų. Penki akvarelinių dažų rinkiniai brangesni už 2 guašo rinkinius 14 litų. Kiek kainavo vienas rinkinys akvarelinių dažų ir kiek — vienas rinkinys guašo?

321. Valtis 80 km atstumą pasroviui nuplaukia per 4 h, o prieš srovę — per 5 h. Raskite valties savąjį greitį ir upės tėkmės greitį.

322. Maksimalus katerio greitis plaukiant upe pasroviui yra 30 km/h, o prieš srovę — 22 km/h. Koks būtų maksimalus katerio greitis ežere?

323. Tadas sutaupė 23 litus, mesdamas į taupyklę tik 20 ir 50 centų vertės monetas. Kiek kokios vertės monetų yra taupyklėje, jei iš viso taupyklėje yra 70 monetų?

APIBENDRINAME

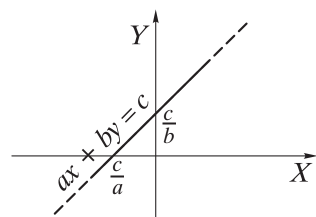
Lygtis, kurioje yra du nežinomieji, vadinama *lygtimi su dviem nežinomaisiais*.

$x + y = 6$
$x,\ y$ — nežinomieji

Lygties su dviem nežinomaisiais *sprendiniu* vadinama nežinomųjų reikšmių pora, su kuria lygtis virsta teisinga skaitine lygybe.

$x = 4,\ y = 2$ yra lygties $x + y = 6$ sprendinys, nes lygybė $4 + 2 = 6$ yra teisinga.

Lygtis, kurią galima užrašyti pavidalu $ax + by = c$, čia a, b, c — skaičiai $(a, b \neq 0)$, vadinama *tiesinė* lygtimi su dviem nežinomaisiais.
Tiesinės lygties sprendinius atitinkantys koordinačių plokštumos taškai išsidėstę vienoje tiesėje.



Kai ieškome dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais bendrųjų sprendinių, tai sakome, kad sprendžiame *lygčių sistemą*.

$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ — dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistema

a, b, c, d, e, f — skaičiai $(a, b, d, e \neq 0)$;
$x,\ y$ — nežinomieji.

$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais *sistemos sprendiniu* vadinama tokia nežinomųjų reikšmių pora, su kuria abi sistemos lygtys virsta teisingomis skaitinėmis lygybėmis.

$x = 4,\ y = 2$ yra sistemos $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ sprendinys, nes

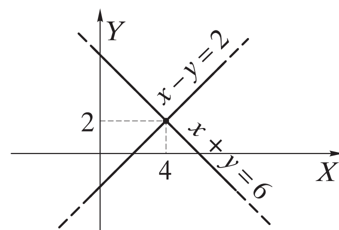
$\begin{cases} 4 + 2 = 6 \\ 4 - 2 = 2 \end{cases}$ — lygybės yra teisingos.

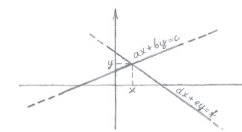
Dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą galima spręsti:

- grafiniu būdu,
- keitimo būdu,
- sudėties būdu,
- lyginimo būdu.

$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Spręsdami *grãfiniu* būdu:
1) braižome abiejų lygčių grafikus;
2) randame tų grafikų bendro taško koordinates.





Spręsdami *keitìmo* būdu:
1) iš sistemos kurios nors lygties išreiškiame kurį nors nežinomąjį kitu; $x = 6 - y$
2) gautąją išraišką įstatome į kitą sistemos lygtį; $6 - y - y = 2$
3) išsprendžiame gautąją lygtį su vienu nežinomuoju; $y = 2$
4) apskaičiuojame kito nežinomojo reikšmę. $x = 6 - 2 = 4$

Spręsdami *sudėtiẽs* būdu:
1) jei reikia, tai pertvarkome lygtis, kad prie vieno iš nežinomųjų būtų vienas kitam priešingi skaičiai;
2) panariui sudedame lygtis;
3) išsprendžiame gautąją lygtį su vienu nežinomuoju;
4) apskaičiuojame kito nežinomojo reikšmę.

$$+\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$
$$4 + y = 6,\ y = 2$$

Spręsdami *lýginimo* būdu:
1) iš abiejų lygčių išreiškiame tą patį nežinomąjį; $\begin{cases} x = 6 - y \\ x = 2 + y \end{cases}$
2) sulyginame gautąsias išraiškas; $6 - y = 2 + y$
3) išsprendžiame gautąją lygtį; $y = 2$
4) apskaičiuojame kito nežinomojo reikšmę. $x = 6 - 2 = 4$

Trys kauliukai

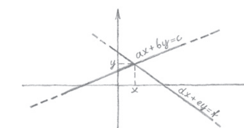
O dabar prisiminkime uždavinį su kauliukais. Tik imkime ne du kauliukus, bet tris (baltą, juodą ir žalią).

UŽDAVINYS. Jonas metė tris kauliukus. Nustatykite, keliomis akutėmis į viršų atvirto baltas, juodas ir žalias kauliukai, jei:

[?] + [?] + [?] = 8,
[?] – [?] + [?] = 0,
2 · [?] + [?] – 3 · [?] = 7.

Bet juk tai trijų lygčių su trimis nežinomaisiais sistema!





SPRENDŽIAME

324. Ar skaičių pora $\left(2\frac{1}{3}; 4\right)$ yra lygties $3x + y = 6$ sprendinys? Raskite du šios lygties sprendinius.

325. Raskite visus neneigiamus sveikuosius lygties sprendinius.
a) $x + y = 8$; b) $x + 2y = 5$; c) $3x + 2y = 8$.

326. Lygties $2{,}5x - 0{,}4y = 20$ vieno nežinomojo reikšmė yra žinoma. Raskite kito nežinomojo reikšmę.
a) $(0; y)$; b) $(x; 0)$; c) $(2; y)$; d) $(x; -10)$.

327. Sudarykite tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais ($ax + by = c$), kurios sprendinys būtų skaičių pora:
a) $(2; 5)$; b) $(-3; 1)$; c) $(0{,}5; -2)$; d) $\left(\frac{1}{3}; 2\frac{1}{4}\right)$.

328. Raskite du lygties sprendinius ir nubrėžkite lygties grafiką.
a) $2x + 3y = 12$; b) $10y - 3x = 0$;
c) $4x + 5y = -10$; d) $3(x + y) - 4(x - y) = 5$;
e) $(x + 2)^2 - \left(x^2 - 3y\right) = 6$; f) $(2x - 1)^2 - (2x - 3)^2 = y$.

329. Raskite visus natūraliuosius lygties $2x + y = 7$ sprendinius. Pažymėkite juos koordinačių plokštumoje ir nubrėžkite tiesę, kurioje yra visi šios lygties sprendiniai.

330. Ar lygties $-3x + 5y = -2$ grafikas eina per tašką:
a) $(0; -0{,}4)$? b) $(-1; 0{,}2)$? c) $\left(2\frac{1}{3}; -1\right)$?

331. Tiesės $x + y = 8$, $y - x = 6$ ir $y = 3$ susikirsdamos apriboja trikampį.
1) Nubraižykite šį trikampį.
2) Nustatykite šio trikampio viršūnių koordinates.
3) Apskaičiuokite trikampio plotą.

332. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą grafiškai.
a) $\begin{cases} 2x + 3y = -3, \\ 5x + 3y = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = 3, \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1; \end{cases}$
c) $\begin{cases} y - x = 13, \\ 5x - 2y = 10; \end{cases}$ d) $\begin{cases} -4x + y = 12, \\ 2x - 0{,}5y = 10. \end{cases}$

333. Susikirsdamos tiesės $y - x = 4$, $y + x = 6$, $y = x$ ir $y + x = 2$ apriboja stačiakampį. Nubraižykite šį stačiakampį ir apskaičiuokite jo plotą.

334. Išspręskite lygčių sistemą keitimo būdu.
a) $\begin{cases} 2x - 3y = -9, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{4} - y = -6, \\ 4x + 7y = -4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x + y = 21, \\ x - \frac{y}{3} = -1. \end{cases}$

335. Išspręskite lygčių sistemą sulyginimo būdu.
a) $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 2x - 5y = -6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 3y = 3, \\ 2x - 3y = -3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = -4, \\ 3x - y = 9. \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 4y = 8, \\ x + 2y = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 + 4y, \\ x = 2 - 2y; \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 8 + 4y = 2 - 2y, \\ 6y = -6, \\ y = -1; \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 8 + 4 \cdot (-1), \\ x = 4. \end{matrix}$$

Atsakymas. $(4; -1)$.

336. Išspręskite lygčių sistemą sudėties būdu.
a) $\begin{cases} 5x + 2y = -10, \\ 4y - 5x = 10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = 8, \\ 3x - 6y = -16; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 5y = 11, \\ 4x - 3y = 5. \end{cases}$

Išspręskite **337–352** uždavinius, sudarydami tiesinių lygčių sistemas.

337. Skrisdamas pavėjui, lėktuvas 280 km nuskrido per pusę valandos. Kelionė atgal truko 40 minučių. Apskaičiuokite savąjį lėktuvo greitį ir vėjo greitį.

338. Ignas 9 kilometrus nuplaukė motorine valtimi pasroviui per 45 minutes. Plaukdamas atgal prieš srovę, jis užtruko 1,5 valandos. Raskite valties savąjį greitį ir upės tėkmės greitį.

339. Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 12. Dešimčių skaitmuo yra dvigubai didesnis už vienetų skaitmenį. Raskite tą skaičių.

Kiekvieną dviženklį skaičių galima užrašyti pavidalu $10 \cdot x + y$, kur x — dešimčių skaitmuo, o y — vienetų skaitmuo. Pavyzdžiui, $26 = 10 \cdot 2 + 6$.

340. Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 7. Jei jo skaitmenis sukeistume vietomis, tai gautasis skaičius būtų 9 vienetais mažesnis už pradinį. Raskite pradinį skaičių.

341. Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 15. Iš duotojo skaičiaus atėmę 27, gauname dviženklį skaičių, užrašytą tais pačiais skaitmenimis, tik atvirkštine tvarka, kaip ir pradinis skaičius. Raskite pradinį skaičių.

342. Dviejų skaičių aritmetinis vidurkis lygus 22. Pusė vieno skaičiaus yra 10 vienetų daugiau nei antrasis skaičius. Raskite tuos skaičius.

343. Jonas dirbo pas ūkininką 3 valandas, o Petras — 4 valandas. Abu kartu jie uždirbo 117 litų. Jei tuos pačius darbus jie būtų dirbę viena valanda ilgiau, būtų uždirbę 150 litų. Kiek litų per valandą uždirbo Jonas ir kiek — Petras?

344. Keliautojai, 4 valandas važiuodami autobusu ir 3 valandas traukiniu, nukeliavo 600 km. Jei jie būtų 2 valandas važiavę autobusu ir 5 valandas traukiniu, tai būtų nukeliavę 580 km. (Sakykime, kad autobuso ir traukinio greičiai nesikeičia.) Apskaičiuokite autobuso greitį ir traukinio greitį.

345. Į dovanų maišelį įdėta 2 rūšių saldainių. Vienos rūšies saldainių kilogramas kainuoja 12 litų, kitos — 10 litų. Tas dovanų maišelis su saldainiais kainavo 8 litus. Kiek gramų kiekvienos rūšies saldainių yra maišelyje, jei tas maišelis saldainių sveria 700 gramų?

346. Buvo sumaišyta dviejų rūšių malta kava. Vienos rūšies kavos kilogramo kaina yra 25 litai, kitos — 30 litų. Gauta 10 kg mišinio, kurio kilogramas kainuoja 27 litus. Kiek kilogramų kiekvienos rūšies kavos yra mišinyje?

347. Vardenis Pavardenis investavo 5000 litų į verslą. Už dalį tų pinigų buvo sutartos 5% metinės palūkanos, o už likusius — 10%. Metų pabaigoje Vardenis Pavardenis gavo 400 litų palūkanų. Kiek pinigų buvo investuota už 5% ir kiek už 10% palūkanų?

348. Jūratė padėjo 6000 litų į banką pagal 2 sutartis. Už dalį pinigų bus mokamos 4% metinės palūkanos, už likusią dalį — 6%. Metų pabaigoje bankas priskaičiavo 330 litų palūkanų. Kiek pinigų buvo paskolinta bankui už 4% ir kiek už 6% metinių palūkanų?

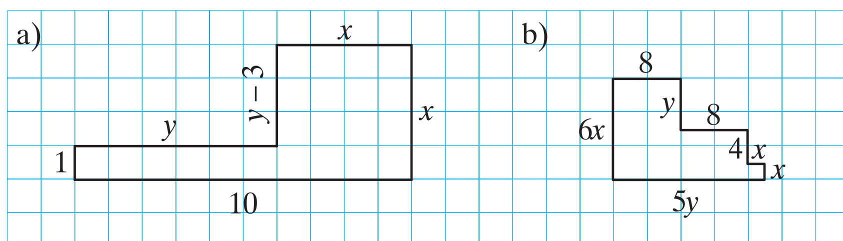
349. Justė sutaupė 1 litą 40 centų monetomis, kurių vertė yra 5 ir 10 centų. Jei 5 centų monetų būtų tiek, kiek yra 10 centų monetų, o 10 centų monetų būtų tiek, kiek yra 5 centų monetų, tai sutaupyta suma būtų 1 litas 75 centai. Kiek kokios vertės monetų surinko Justė?

350. Vidas metė į taupyklę 5 ir 50 centų monetas. Sudaužęs taupyklę, jis rado 52 litus. Jei jis 5 centų monetų būtų radęs dvigubai daugiau, o 50 centų monetų — 20-čia daugiau, tai sutaupyta suma būtų 64 litai. Kiek kurios vertės monetų Vidas rado taupyklėje?

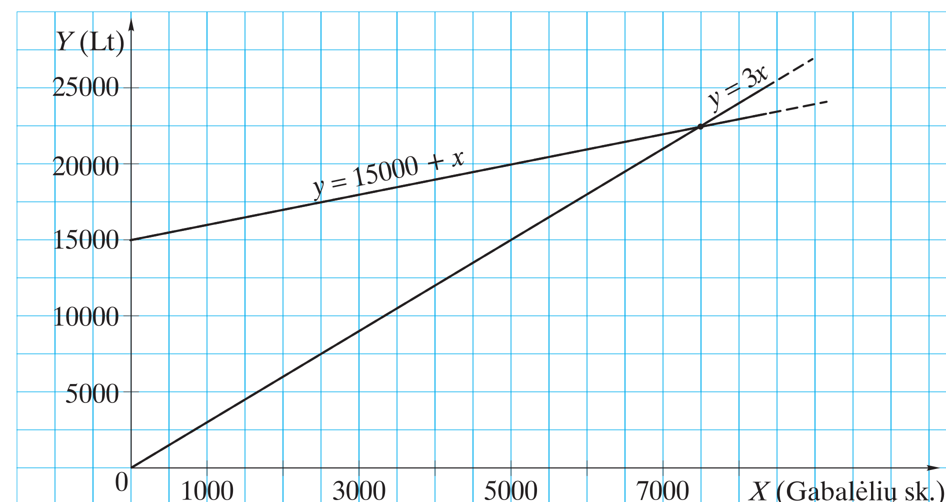
351. Dešinėje pavaizduotas gėlynas. Koks kiekvieno pusskritulio spindulys, jei didesniojo pusskritulio spindulys 3 m ilgesnis už mažesniojo, o stačiakampio perimetras lygus 68 m?



352. Apskaičiuokite pavaizduotos figūros perimetrą.



353. Įmonė gamina tualetinį muilą. Gamybos išlaidos yra 15 000 litų per metus. Muilo vieno gabalėlio pagaminimo išlaidos — 1 litas, o pardavimo kaina — 3 litai. Pateiktame brėžinyje tiesė $y = 15\,000 + x$ vaizduoja visas įmonės išlaidas, o tiesė $y = 3x$ — įplaukas, t. y. pinigų sumą, gautą pardavus pagamintą muilą.



Remdamiesi grafiku, atsakykite į klausimus.

a) Kiek mažiausiai muilo gabalėlių per metus reikia parduoti, kad gamyba nebūtų nuostolinga?

b) Koks pelnas gaunamas pardavus 8000 muilo gabalėlių?

c) Koks būtų nuostolis pardavus 5000 muilo gabalėlių?



354. Įmonė planuoja pradėti gaminti naują gaminį. Numatyta, kad gamybos išlaidos sudarys 15 000 litų, o gaminio vieneto išlaidos bus 3 litai. Įmonė ketina nustatyti 8 litų gaminio pardavimo kainą.

1) Grafiškai pavaizduokite, kaip įmonės visos išlaidos ir įplaukos priklauso nuo apyvartos.

2) Kiek mažiausiai gaminių reikia parduoti, kad gamyba pradėtų duoti pelną?

3) Kokią mažiausią gaminio pardavimo kainą reikia nustatyti, kad įmonė nepatirtų nuostolių, pardavusi 2500 vienetų gaminių?



355. Įrodykite, kad dviženklio skaičiaus ir skaičiaus, užrašyto tais pačiais skaitmenimis, tik atvirkščia tvarka, skirtumas dalijasi iš 9.



356. Įrodykite, kad jei iš triženklio skaičiaus atimsime skaičių, užrašytą tais pačiais skaitmenimis, tik atvirkščia tvarka, gausime skaičiaus 99 kartotinį.

Kaip nurodyti visus lygties $ax + by = c$ sprendinius?

Lygtys su dviem nežinomaisiais

$$ax + by = c \quad (a, b, c \text{ — skaičiai}),$$

kurias nagrinėjome šiame skyriuje, vadinamos neapibrėžtõsiomis.
Terminą „neapibrėžtóji lygtìs“ galima paaiškinti tuo, kad lygtis $ax + by = c$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) turi be galo daug sprendinių. Kaip visus tuos sprendinius nurodyti? Samprotauti galima taip:

- laisvai pasirenkame x reikšmę;
- apskaičiuojame tą x reikšmę atitinkančią y reikšmę.

Skaičiuojant y reikšmę, patogu iš lygties $ax + by = c$ išreikšti y-ą:

$$ax + by = c \quad \big| -ax,$$
$$by = -ax + c \quad \big| : b,$$
$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

O visus lygties sprendinius galima nurodyti taip $\left(x; -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right)$.
Pavyzdžiui, lygties $2x + 3y = 6$ sprendiniai yra $\left(x; -\frac{2}{3}x + 2\right)$.
Pirmąją knygą apie neapibrėžtųjų lygčių sprendimą sveikaisiais skaičiais parašė žymusis graikų matematikas Diofantas, gyvenęs III m. e. a. Aleksandrijos mieste. Manoma, kad dar 500 metų anksčiau spręsti tokias lygtis mokėjo Archimedas. Europoje neapibrėžtųjų lygčių sveikuosius sprendinius XVII a. pradžioje pirmasis pradėjo tyrinėti prancūzų matematikas Bašė de Meziriakas, Diofanto kūrinių leidėjas ir komentatorius.

Uždaviniai

1. Užrašykite visus lygties sprendinius.
a) $x + y = 6$; b) $x - y = 2$; c) $2x - 5y = 13$; d) $-4a + 7b = 0$.

> Užrašykime lygties $2x + 3y = 6$ sprendinius.
>
> 1) Išsireiškiame y:
> $2x + 3y = 6$,
> $3y = 6 - 2x$,
> $y = \frac{6-2x}{3}$;
>
> 2) Rašome atsakymą:
> $\left(x; \frac{6-2x}{3}\right)$.

2. Užrašykite tiesinę lygtį su dviem nežinomaisiais x ir y, kurios sprendiniai yra:
a) $(x; 2x + 1)$; b) $\left(x; -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}\right)$; c) $(x; -2x)$; d) $(x; x)$.

Žymiausias Diofanto veikalas yra „Aritmetika“. Tai buvo 13 knygų rinkinys, bet iki šių dienų išliko tik 6 knygos. Čia matote vienos iš jų titulinį lapą (leidinio leidėjas ir komentatorius B. de Meziriakas).

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.



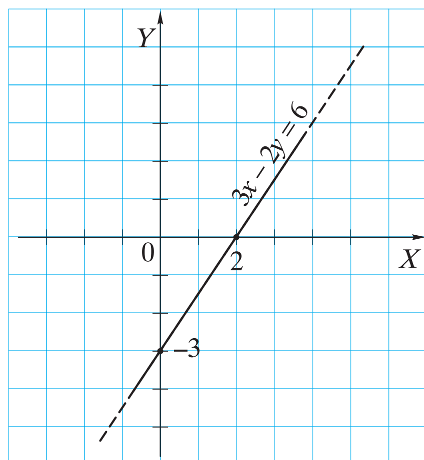
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

TESTAS

357. Kurios lygties sprendinys yra skaičių pora (2; 5)?

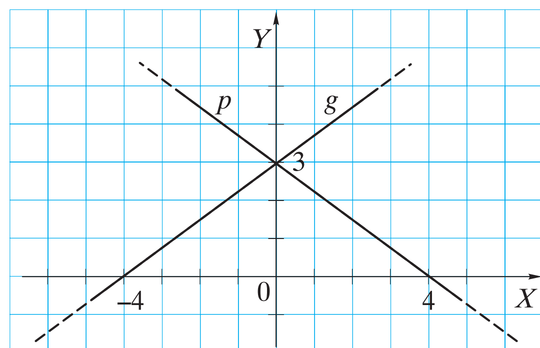
A $2x - y = 1$ **B** $2x - y = -1$ **C** $2y - x = 1$ **D** $2x - y = 5$

358. Naudodamiesi brėžiniu nustatykite, kuri skaičių pora yra lygties $3x - 2y = 6$ sprendinys.



A (1; 1) **B** (0; 2) **C** (2; 0) **D** (−3; 0)

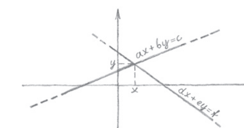
359. Kurioje tiesėje yra išsidėstę visi lygties $3x + 4y = 12$ sprendiniai?



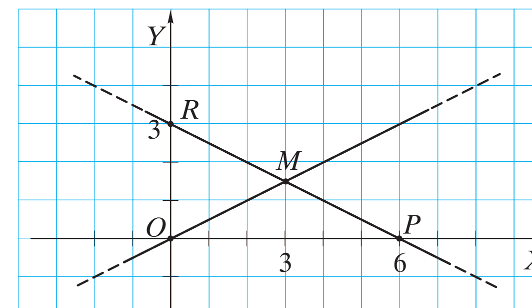
A Tiesėje p **B** Tiesėje g **C** Nė vienoje iš jų **D** Abiejose

360. Kuri skaičių pora yra lygčių sistemos $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ x - 4y = 11 \end{cases}$ sprendinys?

A (2; 1) **B** (11; 0) **C** (3; −2) **D** (0; 0)



361. Kurio taško koordinatės yra lygčių sistemos $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ 2y + x = 6 \end{cases}$ sprendinys?



A Taško P **B** Taško R **C** Taško M **D** Taško O

362.

= 198 Lt

= 222 Lt

Kiek kainuoja vieneri marškiniai ir kiek — vienas kaklaryšis, jei žinoma, kad visi marškiniai parduodami už tą pačią kainą ir visi kaklaryšiai parduodami už tą pačią kainą?

A 50 Lt 34 Lt **B** 34 Lt 50 Lt **C** 54 Lt 30 Lt **D** 30 Lt 54 Lt

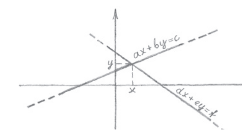
363. Lėktuvas 960 kilometrų nuskrido per 3 valandas pavėjui. Grįžtant atgal, tam pačiam atstumui nuskristi prireikė 4 valandų. Koks vėjo greitis ir koks savasis lėktuvo greitis? Kuri lygčių sistema atitinka šią sąlygą?

A $\begin{cases} (x - y) \cdot 3 = 960 \\ (x + y) \cdot 4 = 960 \end{cases}$ **B** $\begin{cases} (x + y) \cdot 3 = 960 \\ (x - y) \cdot 4 = 960 \end{cases}$

C $\begin{cases} 3x + y = 960 \\ 4x - y = 960 \end{cases}$ **D** $\begin{cases} 3x + 4y = 960 \\ 4x - 3y = 960 \end{cases}$

364. Dviženklio skaičiaus vienetų skaitmuo yra 4 didesnis už dešimčių skaitmenį. Jei skaičių užrašytume tais pačiais skaitmenimis, tik atvirkščia tvarka, gautasis skaičius būtų 1 mažesnis už dvigubą pradinį skaičių. Raskite pradinį skaičių.

A 26 **B** 62 **C** 73 **D** 37



PASITIKRINAME

365. Ar lygties $5x + y = 8$ sprendinys yra skaičių pora:
a) $(1; 3)$? b) $(2; -2)$? c) $(3; 7)$?

366. Raskite du lygties sprendinius.
a) $3x + y = 7$; b) $5x - 2y = 5$; c) $4x + 8y = 16$.

367. Kuri skaičių pora yra lygčių sistemos $\begin{cases} x + 4y = 5, \\ 5x - y = 4 \end{cases}$ sprendinys?
A $(1; 1)$ **B** $(0; -4)$ **C** $(5; 0)$ **D** $(0; 0)$ **E** $(-1; -1)$

368. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą grafiškai.
a) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x + 3y = 5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 4y = 4, \\ 2y - x = -4. \end{cases}$

369. Išspręskite lygčių sistemą keitimo būdu.
a) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 12, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$

370. Išspręskite lygčių sistemą sudėties būdu.
a) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y = 15, \\ 5x - y = 5; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x + 5y = 11. \end{cases}$

371. Išspręskite lygčių sistemą jums patogiu būdu.
a) $\begin{cases} 3x + 5y = 9, \\ 3x - y = -9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 8y = 7, \\ 4x - 8y = 12; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ 2y - 5x = 13. \end{cases}$

372. Nebraižydami lygties $4x - y = 1$ grafiko, nustatykite, ar jam priklauso taškas:
a) $(1; 3)$; b) $(2; -7)$; c) $(0; -1)$.

373. Nebraižydami lygčių grafikų, raskite tų grafikų bendro taško koordinates, kai lygtys yra:
a) $x + 4y = 6$ ir $x - 2y = 18$; b) $3x - y = 17$ ir $y = 8 - 2x$.

374. Viešbučio reklamoje turistams skelbiama:

3 pietūs ir *2 nakvynės* pas mus kainuoja **210 litų**

4 pietūs ir **3 nakvynės** – tik *300 litų!*
Skubėkite, vietų dar yra!

Kiek kainuoja vieneri pietūs ir kiek — viena nakvynė viešbutyje?

375. Motorinės valties greitis pasroviui — 22 km/h, o prieš srovę — 18 km/h. Koks upės tėkmės greitis ir koks savasis valties greitis?

376. Dviejų skaičių suma lygi 56, o skirtumas lygus 14. Raskite tuos skaičius.

377. Už 3 storus ir 4 plonus sąsiuvinius Simas sumokėjo 8 litus. Kiek kainavo storas sąsiuvinis ir kiek plonas, jei žinoma, kad plonas sąsiuvinis 1,5 lito pigesnis už storą?

378. Jūrų keltas plukdo 19 dviejų rūšių automobilių. Vienos rūšies automobiliai sveria po 1300 kg, o kitos — po 2200 kg. Bendra visų automobilių masė yra 31 t. Raskite, kiek lengvesnių automobilių plukdo keltas.

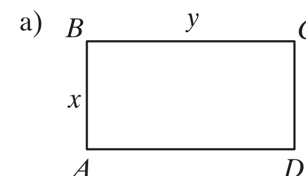
379. Dviženklio skaičiaus skaitmenų suma lygi 15. Jei jo skaitmenis sukeistume vietomis, tai gautasis skaičius būtų 9 vienetais mažesnis už pradinį. Raskite pradinį skaičių.

380. Dviejų skaičių aritmetinis vidurkis lygus 28. Pusė vieno skaičiaus lygi trigubam kitam skaičiui. Raskite tuos skaičius.

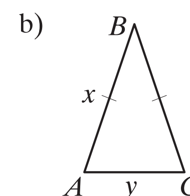
381. Buvo sumaišyti dviejų rūšių miltai. Vienos rūšies miltų kilogramo kaina — 4 litai, kitos — 6 litai. Gauta 60 kg mišinio, kurio kilogramas kainuoja 5,5 lito. Kiek kilogramų kiekvienos rūšies miltų buvo sumaišyta?

382. Šeima padėjo į banką 2000 litų: dalį pinigų už 3% metinių palūkanų, likusius — už 4%. Metų pabaigoje buvo priskaičiuota 72 litai palūkanų. Kiek pinigų buvo padėta už 3% ir kiek — už 4% metinių palūkanų?

383. Apskaičiuokite x ir y.

a) 

$ABCD$ — stačiakampis, kurio perimetras lygus 38 cm, o ilgis 5 cm didesnis už plotį.

b) 

ABC — lygiašonis trikampis, kurio perimetras lygus 35 cm, o pagrindas dvigubai trumpesnis už šoninę kraštinę.

KARTOJAME

384. Atskliauskite reiškinį, sutraukite panašiuosius narius, o tada apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) $2(3a-5)-3(4a+10)$, kai $a=0$; $a=\frac{2}{3}$; $a=-1{,}2$; $a=\sqrt{2}$;

b) $2(3a-5)^2-(a+1)(a-1)$, kai $a=-1$; $a=\sqrt{3}$; $a=\frac{1}{2}$;

c) $(2x-1)(3x+2)$, kai $x=0$; $x=-2$; $x=1{,}5$; $x=\sqrt{5}$;

d) $-3(2+y)^2+y(y-2)$, kai $y=0$; $y=2$; $y=\sqrt{10}$.

$a(b\pm c)=ab\pm ac$, $(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$;
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$,
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

385. Iškelkite bendrąjį dauginamąjį prieš skliaustus, o tada apskaičiuokite reiškinio reikšmę.

a) a^2-15a, kai $a=15$; $a=0$; $a=65$;

b) $36a-a^2$, kai $a=16$; $a=-64$; $a=-1$;

c) $3x-2x^2$, kai $x=-1$; $x=1$; $x=1{,}5$;

d) $-12x^2-8x$, kai $x=1{,}2$; $x=-\frac{3}{2}$; $x=1\frac{3}{4}$.

386. Trinarį parašykite kaip dvinario kvadratą, o tada apskaičiuokite jo reikšmę.

a) $4a^2+4a+1$, kai $a=-1$;

b) $16x^2-24x+9$, kai $x=3$;

c) $49-14y+y^2$, kai $y=-7$;

d) $36a^2-12ab+b^2$, kai $a=\frac{1}{6}$, $b=\sqrt{9}$.

387. Parašykite dvinarį kaip sandaugą.

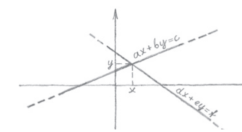
a) a^2-100; b) $4a^2-9$; c) a^2-50; d) $2a^2-3$.

$7x^2-9=(\sqrt{7}x)^2-3^2=(\sqrt{7}x-3)(\sqrt{7}x+3)$

388. Koks skaičius buvo sugalvotas, jei žinoma, kad:

a) jis yra neigiamas ir iš dvigubo jo kvadrato atėmus 12, gaunamas 0?

b) jis yra teigiamas ir prie 20% to skaičiaus kvadrato pridėjus 20, gaunama 111?



PRISIMENAME TAI, KO PRIREIKS KITAME SKYRIUJE

389. Išspręskite lygtį.

a) $2x-3=x+4$; b) $4x-(x+2)=x-2$;

c) $-9x+10=-4(x-3)$; d) $\frac{x}{6}+5=7$;

e) $\frac{2x-4}{9}=10$; f) $-3(2x-4)=2(5-x)$.

390. Apskaičiuokite reiškinio $3a-5b$ reikšmę, kai:

a) $a=0$, $b=3$; b) $a=\frac{2}{3}$, $b=2\frac{1}{5}$.

391. Petraitis investavo 3000 litų už:

a) 3% metinių palūkanų; b) 4% metinių palūkanų.

Kiek palūkanų litais jis gaus metų pabaigoje?

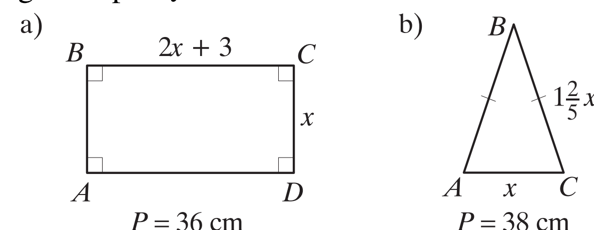
Išspręskite **392–397** uždavinius, sudarydami lygtis.

392. Vienas skaičius 12 vienetų didesnis už kitą, o jų suma lygi 140. Raskite tuos skaičius.

393. Vienas skaičius 2,5 karto didesnis už kitą, o jų skirtumas lygus 36. Raskite tuos skaičius.

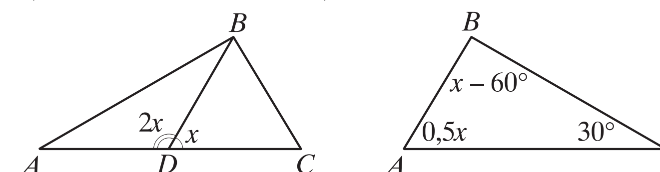
394. Plaukdamas motorine valtimi pasroviui, Audrius kelionėje užtruko 3 valandas. Tą patį atstumą atgal jis nuplaukė per 4 valandas. Koks motorinės valties savasis greitis, jei upės tėkmės greitis 2 km/h?

395. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite figūros kraštinių ilgius ir plotą.

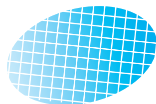


396. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite:

a) $\angle BDC$, $\angle ADB$; b) $\angle A$, $\angle B$.



397. Koordinačių plokštumoje pažymėkite taškus $A(0;5)$, $B(-4;2)$, $C(-1;2)$, $D(-6;-3)$, $E(6;-3)$, $F(1;2)$, $G(4;2)$ ir nuosekliai (pradėdami ir baigdami taške A) sujunkite juos atkarpomis.



Jonas sprendė tik pirmuosius 5 žemiau pateiktus „Kengūros“ uždavinius ir sužymėjo, jo manymu, teisingus atsakymus.
Ona sprendė visus 10 „Kengūros“ uždavinių ir sužymėjo, jos manymu, teisingus atsakymus.

1. Kam lygu $0 + 1 + (-1) - 1 - (-1)$? **A** 0 **B** 1 **C** -1 **D** 4 **E** -2

2. Ant stalo guli moneta. Kiek daugiausia tokių pat monetų galima padėti ant stalo, kad jos liestų pirmąją? **A** 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

3. Atlikus daugybos veiksmą, kai kurie skaitmenys buvo pakeisti raidėmis (žr. dešinėje). Koks skaitmuo buvo pakeistas raide A?
A 4 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

$$\begin{array}{r} 8\,B\,0\,6 \\ \times \quad\quad C \\ \hline A\,4\,7\,5\,4 \end{array}$$

4. Kam lygus klaustuku pažymėto kampo dydis?
A 38° **B** 66° **C** 71° **D** 76° **E** 90°

?
38°

5. Kokį kampą laikrodžio rodyklės sudaro pusę antros?
A 180° **B** 120° **C** 130° **D** 150° **E** 135°

6. Kam lygi suma $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$?
A $\frac{3}{1110}$ **B** $\frac{3}{1000}$ **C** $\frac{111}{1000}$ **D** $\frac{111}{1110}$ **E** $\frac{3}{111}$

7. Du litrus sulčių, kuriose yra 10% cukraus, sumaišome su trimis litrais sulčių, kuriose yra 15% cukraus. Koks cukraus procentas bus mišinyje?
A 25% **B** 5% **C** 13% **D** 12,5% **E** 12,75%

8. Milijonas sekundžių — tai maždaug:
A 3 paros **B** 12 parų **C** 3 mėnesiai **D** 1 metai **E** 2 metai

9. Sprinteris 100 m nubėgo per 10 s. Kokiu vidutiniu greičiu bėgo sprinteris?
A 28 km/h **B** 20 km/h **C** 30 km/h **D** 36 km/h **E** 42 km/h

10. Mėgintuvėlio bakterijų skaičius padvigubėja kas valandą. Kiek kartų padidės bakterijų skaičius per 10 valandų?
A 20 **B** 1000 **C** 1024 **D** 2048 **E** 512

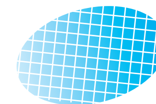
Jono atsakymai

1	2	3	4	5
A	**E**	**D**	**A**	**B**

Onos atsakymai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	**E**	**D**	**A**	**E**	**B**	**C**	**D**	**C**	**C**

1) Kiek klaidų padarė Jonas ir kiek — Ona?
2) Kurią visų spręstų uždavinių dalį Jonas išsprendė teisingai ir kurią visų uždavinių dalį Ona išsprendė teisingai? Atsakymus parašykite paprastosiomis trupmenomis, dešimtainėmis trupmenomis, procentais.
3) Kokiu pažymiu dešimtbalėje sistemoje įvertintumėte Jono ir Onos darbus?



„Kengūros“ konkurso sąlygos teigia, kad:
- pasirinkus teisingą atsakymą, skiriami visi to uždavinio taškai (3, 4 arba 5);
- pasirinkus neteisingą atsakymą, atimama $\frac{1}{4}$ to uždavinio taškų ($\frac{3}{4}$, 1 arba $\frac{5}{4}$);
- nepasirinkus jokio atsakymo, skiriama 0 taškų.

Iš viso „Kengūros“ konkurse pateikiama 30 uždavinių: 10 — trijų taškų vertės, 10 — keturių ir 10 — penkių taškų vertės.

Kad dalyvis niekada nesurinktų neigiamo taškų skaičiaus, jam papildomai skiriama 30 taškų.

Vadinasi, išsprendus *visus* uždavinius:
- *teisingai*, surenkama $30 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 150$ taškų;
- *neteisingai*, surenkama $30 - \frac{3}{4} \cdot 10 - 1 \cdot 10 - \frac{5}{4} \cdot 10 = 0$ taškų.

Nepažymėjus nė vieno uždavinio atsakymo, surenkama 30 taškų.

Kiekvienam uždaviniui pateikiami penki atsakymo variantai, iš kurių yra teisingas vienintelis atsakymas (kiti keturi — neteisingi).

1 klausimėlis. Kokia tikimybė atspėti teisingą „Kengūros“ konkurso uždavinio atsakymą? Kaip manote, ar verta spėti „aklai“?

2 klausimėlis. Sprendžiant „Kengūros“ uždavinius, dažnai padeda tokia strategija — pirmiausia atmetame akivaizdžiai neteisingus atsakymus, o tada renkamės iš likusių neatmestų atsakymų. Pasvarstykite, iš kelių atsakymų renkantis jau verta spėti?



1 skyrius

87. a), c), d) — taip; b) — ne.

88. a) -3; b) 1; c) 140; d) 5.

89. a) $P = 60$, $S = 210$;
b) $P = 100$, $S = 150\sqrt{10}$;
c) $P = 24$ cm, $S = 16\sqrt{3}$ cm^2;
d) $P = 16 + 8\sqrt{5}$, $S = 32\sqrt{5}$;
e) $P = 10 + 2\sqrt{35}$, $S = 5\sqrt{35}$;
f) $P = 4\sqrt{3}$ mm, $S = 3$ mm^2.

90. a) 2,65; b) 5,39; c) 10,25; d) 22,36.

91. a) 7; b) 18,6; c) 1.

92. a) $P = 4\sqrt{13}$ cm, $d = \sqrt{26}$ cm;
b) $P = 8\sqrt{5}$ cm, $d = 2\sqrt{10}$ cm;
c) $P = 16\sqrt{3}$ mm, $d = 4\sqrt{6}$ mm.

93. a) $-\sqrt{17}$; $-2\sqrt{3}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{15}$; $3\sqrt{4}$;
b) $-\sqrt{0{,}3}$; $-0{,}1$; 0,3; $\sqrt{\frac{11}{15}}$; $\sqrt{1\frac{2}{7}}$.

94. a) 0 1 $\sqrt{11} \approx 3{,}3$
b) 0 1 $\sqrt{28} \approx 5{,}3$
c) 0 1 $\sqrt{50} \approx 7{,}1$
d) $-\sqrt{10} \approx -3{,}2$ 0 1

95. a) -5; b) -350; c) -7; d) -17.

96. a) $39 - 12\sqrt{3}$; b) $12 + 2\sqrt{35}$; c) 0.

97. a) 8; 2; 2,2; b) 15; 24; 138.

98. a) 6; b) 10; c) 60; d) 3; e) 5; f) 6; g) 15; h) $2\frac{2}{3}$.

99. a) $10\sqrt{10}$; b) $2\sqrt{10}$; c) $3\sqrt{15}$; d) $8\sqrt{5}$.

100. a) $12\sqrt{3}$; b) $7\sqrt{5}$; c) $5\sqrt{11} - \sqrt{7}$.

101. a) $4\sqrt{6} + 6$; b) $6 + 8\sqrt{3}$; c) $15 - 3\sqrt{15}$.

102. a) $4\sqrt{40} - 3\sqrt{40} = \sqrt{40}$;
b) $10\sqrt{20} + 3\sqrt{20} = 13\sqrt{20}$;
c) $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$.

103. a) 10,8; b) 0,42; c) 8; d) $\frac{3}{5}$.

104. $P = 36$ cm, $S = (36 + 18\sqrt{3})$ cm^2.

105. $U \approx 36$ V.

2 skyrius

164. a) 5; b) 3,5; c) 8,5; d) 7.

165. a) $M(5)$; b) $M(2)$; c) $M(3{,}5)$.

166. $C(5; -1)$, $D(5; 7)$ arba $C(-11; -1)$, $D(-11; 7)$.

167. a) 5; b) 13; c) 5; d) $2\sqrt{10}$.

168. a) 4; b) 8; c) 5; d) 5.

169. 1) $AB = \sqrt{17}$, $BC = \sqrt{17}$, $AC = \sqrt{34}$.
2) $P_{ABC} = 2\sqrt{17} + \sqrt{34}$.
3) $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

170. a) $(-3; -2)$; b) $(3; 2)$; c) $(3; -2)$.

172. a) F; b) M ir N.

173. a) $A_1(-6)$; b) $A(-3; -6)$.

174. a) I ketvirtyje;
b) III ketvirtyje;
c) IV ketvirtyje;
d) OY ašies teigiamoje pusašėje;
e) II ketvirtyje;
f) OX ašies neigiamoje pusašėje.

175. 1) $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $O_1\left(-\frac{13}{2}; \frac{9}{2}\right)$.
2) $CD = 8\sqrt{2}$, $D(2; 2)$.
3) $\sqrt{\frac{317}{2}}$.
4) $C = 8\pi$.

3 skyrius

254. a) $f(0)=4,\ f(-1)=-1,\ f(2)=14;$
b) $f(0)=-1,\ f(-1)=-\frac{1}{2},\ f(2)=-5;$
c) $f(0)=0,\ f(-1)=-\frac{1}{4},\ f(2)=\frac{4}{5}.$

255. a) $f(2)=9;\ f(-2)=-11;\ f(0)=-1.$
b) $\frac{3}{5};\ -\frac{1}{5};\ \frac{1}{5}.$
c) Ne.

256. a) A — priklauso; B, C, D — nepriklauso;
b) N, T — priklauso; M, P — nepriklauso.

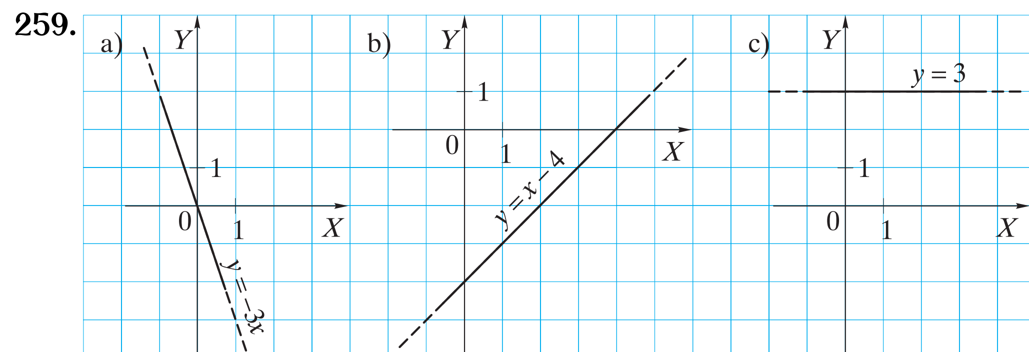
257.

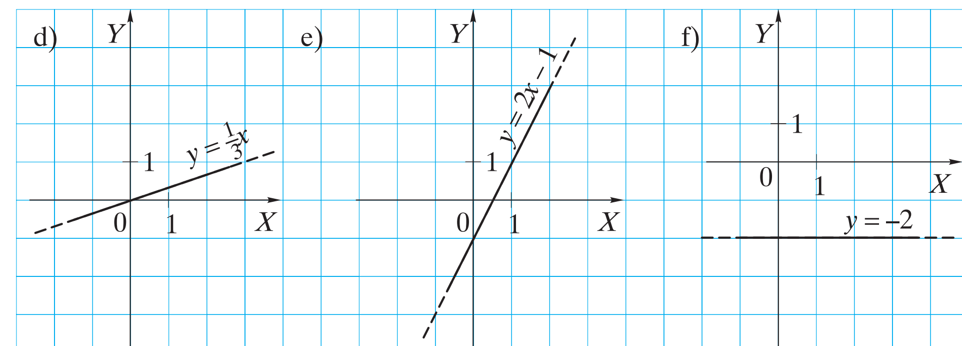
$x=$	0	−1	5	−2	4	3	2	1
$f(x)=$	−3	−4	2	−5	1	0	−1	−2

a) OX ašį kerta taške (3; 0), OY ašį — taške (0; −3);
b) $x=3$; c) $x\in(3;+\infty)$; d) $x\in(-\infty;3]$.

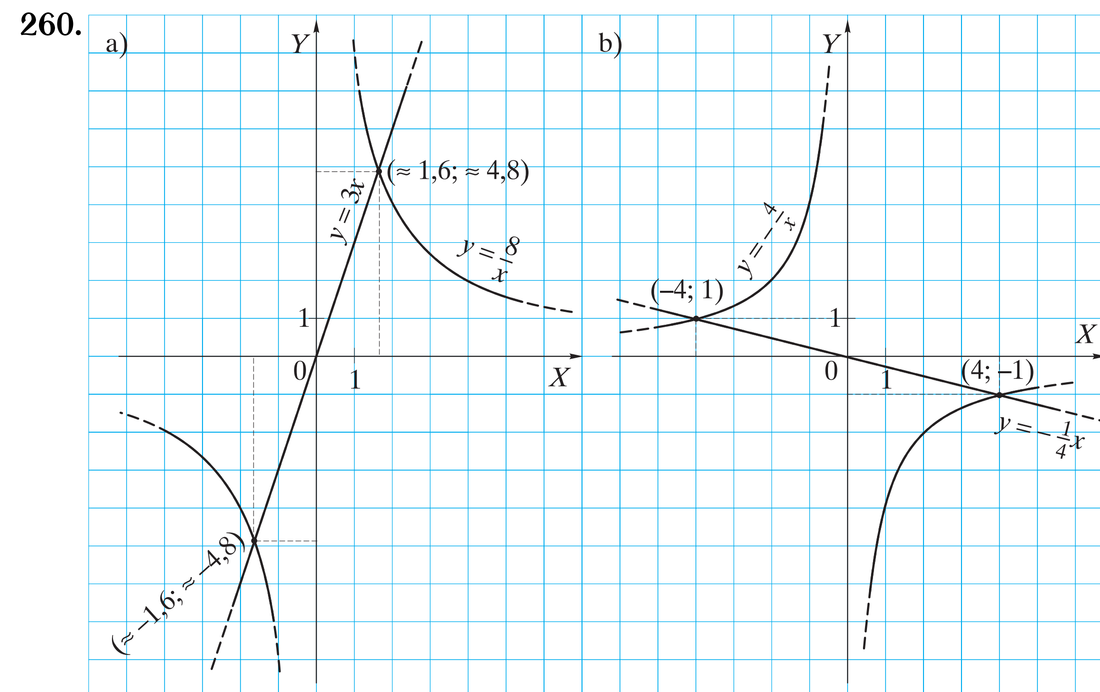
258. 1) *Nurodymas*. Taikykite Pitagoro teoremą.
2) $d(4)=4\sqrt{2},\ d\left(2\sqrt{2}\right)=4;$
3) 3 cm.

259.





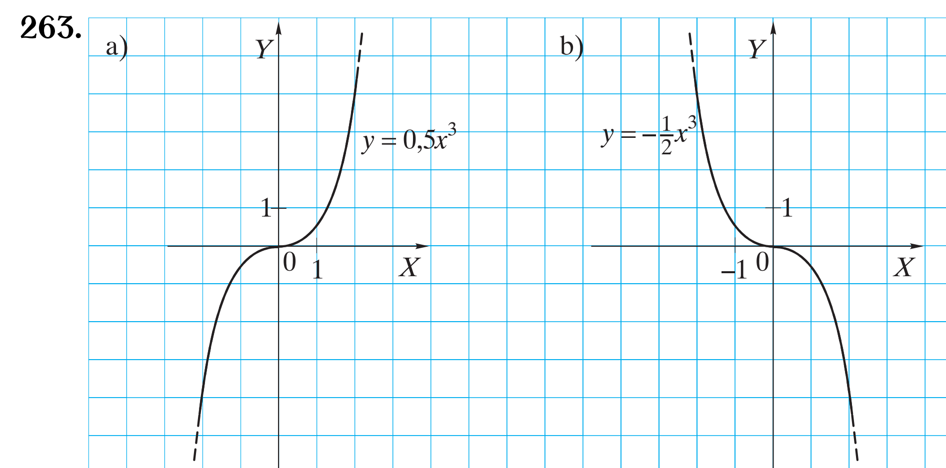
260.



261. a) $f(x)=\frac{1}{4}x^2$; b) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$; c) $f(x)=-3x^2$.

262. $k=\frac{1}{2}$.

263.



264. a) $x_1=-3,\ x_2=3$; $(-\infty;-3),\ (3;+\infty)$;
b) $x_1=-1,\ x_2=2$; $[-1;2]$.

265. a) $\frac{1}{2}$; 2; b) −3; 2; c) −2; d) $\approx -1{,}1$; $\approx 1{,}1$.

266. a) $(-1;5)$; b) $(-\infty;0)$; c) $(-\infty;-1]$.

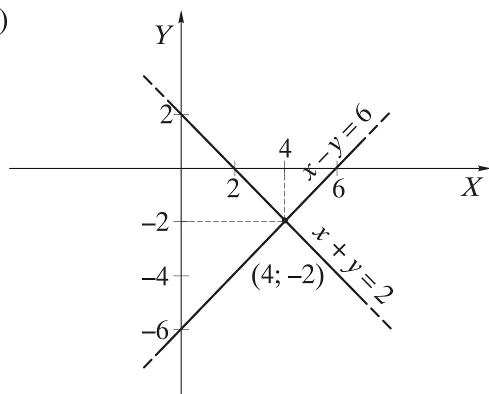
4 skyrius

365. a), b) — taip, c) — ne.

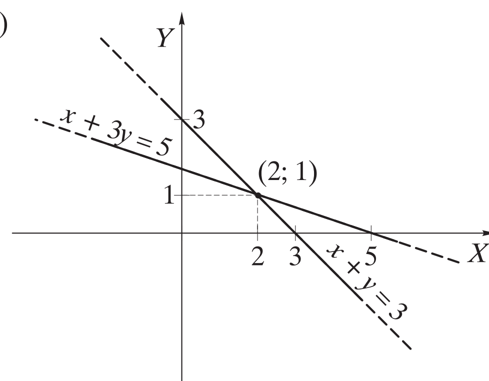
366. Pavyzdžiui: a) (0; 7), (2; 1); b) (1; 0), (3; 5); c) (0; 2), (4; 0).

367. **A**.

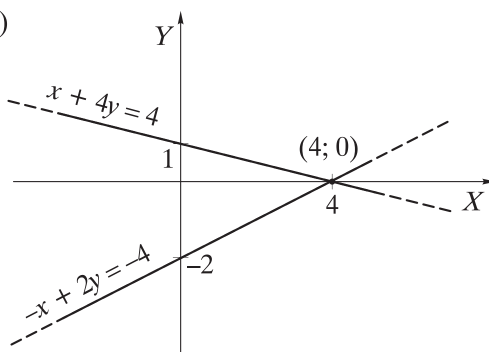
368. a)



b)



c)



369. a) (4; −2); b) (4; 8); c) (1; 0).

370. a) (4; −2); b) (2; 5); c) (2; 1).

371. a) (−2; 3); b) (5; 1); c) (−5; −6).

372. a), c) — taip, b) — ne.

373. a) (14; −2); b) (5; −2).

374. Pietūs — 30 Lt, nakvynė — 60 Lt.

375. Upės tėkmės greitis — 2 km/h, valties savasis greitis — 20 km/h.

376. 35; 21.

377. 2 Lt.

378. 12.

379. 87.

380. 48; 8.

381. 4 Lt vertės — 15 kg, 6 Lt vertės — 45 kg.

382. Už 3% — 800 Lt, už 40% — 1200 Lt.

383. a) $x = 7$ cm, $y = 12$ cm; b) $x = 14$ cm, $y = 7$ cm.

$(\sqrt{a})^2 = a \quad (\sqrt{a},\ a \geqslant 0)$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a, b \geqslant 0)$

$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b} \quad (a, b \geqslant 0)$

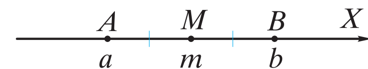
$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b} \quad (a \geqslant 0,\ b > 0)$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geqslant 0,\ b > 0)$

$|a| = \left[\begin{array}{l} -a, \text{ kai } a < 0 \\ a, \text{ kai } a \geqslant 0 \end{array}\right.$

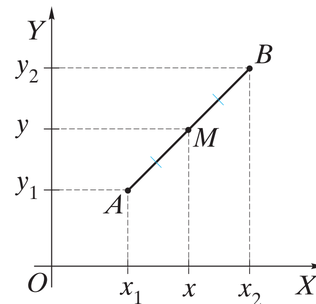


$OA = |a|$



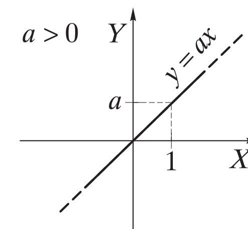
$AB = |b - a|$

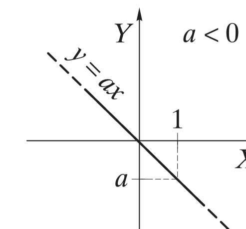
$m = \frac{a + b}{2}$

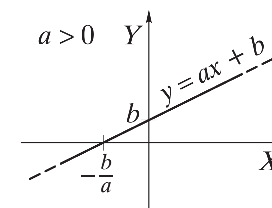


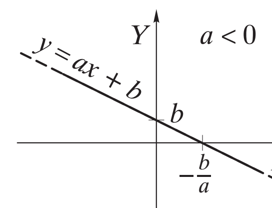
$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

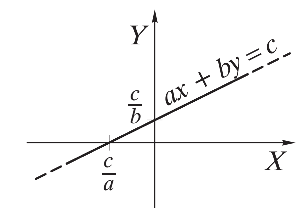
$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

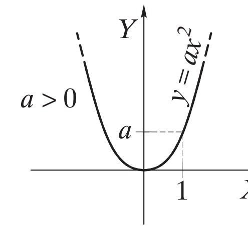


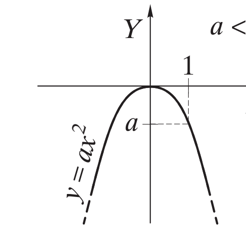


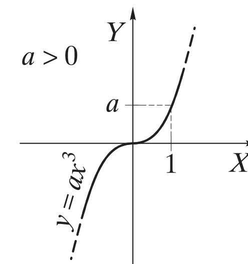


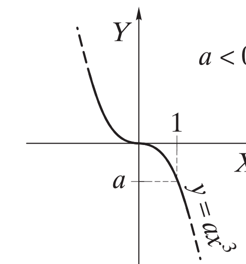












Matematika tau+

9 klasė

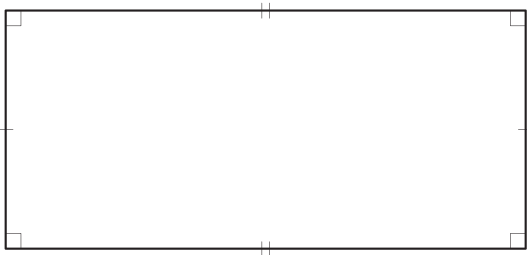
2 dalis

TEV

Pagrindiniai skyreliai

Uždaviniai — panašūs, o lygtys — skirtingos

Paveikslėlyje pavaizduotas stačiakampis sklypas. To sklypo vienas kraštas yra 14 metrų ilgesnis už kitą kraštą.



Jei trumpesniojo krašto ilgis yra x, tai ilgesniojo krašto ilgis yra $x+14$.

1 UŽDAVINYS.

1) Trumpesniojo krašto ilgį pažymėję x-u, užrašykite *formulę*, kuria remiantis būtų galima apskaičiuoti šio sklypo:
   a) perimetrą P; b) plotą S.
2) Naudodamiesi formulėmis, apskaičiuokite sklypo perimetrą ir plotą, kai $x = 50$ m.

2 UŽDAVINYS.

Apskaičiuokite sklypo *trumpesniojo krašto ilgį* x, kai žinoma, kad sklypo *perimetras* $P = 92$ metrai.

Reikia išspręsti lygtį $(x + x + 14) \cdot 2 = 92$.

Tokią lygtį spręsti *moku*!

3 UŽDAVINYS.

Apskaičiuokite sklypo trumpesniojo krašto ilgį x, kai žinoma, kad sklypo *plotas* $S = 480$ kvadratinių metrų.

Reikia išspręsti lygtį $x \cdot (x + 14) = 480$.

Tokios lygties spręsti *nemoku*...

Kvadratinės lygtys

Šiame skyriuje nagrinėsime kvadratines lygtis, t. y. tokias lygtis, kurias galima užrašyti taip:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

- Pakartosime, kaip sprendžiamos nepilnosios kvadratinės lygtys $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$ ir $ax^2 = 0$.
- Mokysimės spręsti pilnąsias kvadratines lygtis $ax^2 + bx + c = 0$.

5.1. KVADRATINĖ LYGTIS

Šiame atverstinyje susipažinsime su ***kvadrãtinėmis*** lygtimis:

$ax^2+bx+c=0$; čia x — nežinomasis, a, b ir c — skaičiai ($a \neq 0$).

Lygtyje $ax^2+bx+c=0$ yra narys su nežinomuoju, kuris pakeltas kvadratu (x^2). Todėl jos vadinamos kvadratinėmis.

1 užduotis. Užrašykite kvadratinę lygtį $ax^2+bx+c=0$, kurioje:

a) $a=2$, $b=3$, $c=1$; b) $a=3$, $b=-2$, $c=4$;

c) $a=1$, $b=-1$, $c=0$; d) $a=-1$, $b=0$, $c=-2$.

Lygtyje $2x^2+5x-1=0$: $a=2$, $b=5$, $c=-1$

Lygtyje $-x^2-x=0$: $a=-1$, $b=-1$, $c=0$

2 užduotis. Pasakykite kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ koeficientų a, b ir c reikšmes, jei ta lygtis yra:

a) $2x^2+3x+1=0$; b) $3x^2-2x+4=0$;

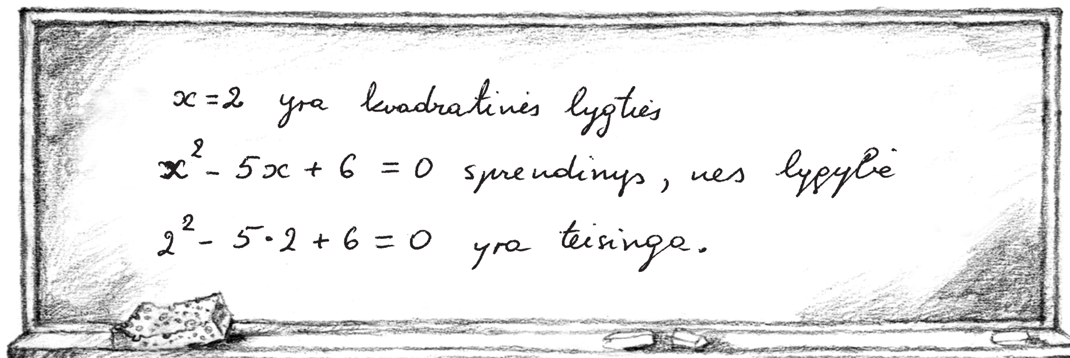
c) $-x^2+x+4=0$; d) $x^2-5=0$.

Skaičiai a, b ir c vadinami lygties $ax^2+bx+c=0$ koeficieñtais:
- skaičius a vadinamas koeficientù prie x^2;
- skaičius b vadinamas koeficientu prie x;
- skaičius c vadinamas laisvúoju nariù.

3 užduotis. Tikrindami kiekvieną debesėlio skaičių, nustatykite, kurie iš jų yra duotosios lygties sprendiniai.

−1 −2 0 1 2 3

a) $2x^2+3x+1=0$; b) $x^2-5x+6=0$;
c) $x^2-1=0$; d) $x^2+2x=0$.



$2x\cdot x + (x+1)^2 = 100\ cm^2$

1. Užrašykite kvadratinę lygtį $ax^2+bx+c=0$, kurioje:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
$a=$	2	−2	−2	1	−1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$b=$	3	3	−3	2	−2	1	0	1	0
$c=$	1	−1	2	−4	4	1	2	0	0

2. Parašykite kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ koeficientų a, b ir c reikšmes, jei ta lygtis yra:

a) $3x^2-17x+4=0$; b) $-2x^2+3x-1=0$; c) $x^2+x-4=0$;

d) $x^2-x+3=0$; e) $-x^2+x-3=0$; f) $-x^2-x=0$;

g) $-0{,}2x^2+2x=0$; h) $-\frac{1}{5}x^2-5=0$; i) $\frac{1}{3}x^2=0$.

3. Duotąją lygtį parašykite kaip $ax^2+bx+c=0$ ir nurodykite koeficientų a, b ir c reikšmes.

a) $x(x-4)=0$; b) $-2x(x-1)=0$; c) $x(4+x)=4$;

d) $(4x-1)x=\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{2}x-x^2=2$; f) $0{,}4x^2=x(x-1)$.

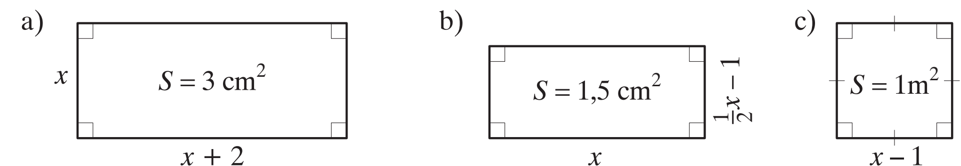
4. Tikrindami kiekvieną iš skaičių −2; 0; 1, nustatykite, kurie iš jų yra duotosios lygties sprendiniai.

a) $x^2-4=0$; b) $x^2-1=0$; c) $2x^2=0$;

d) $x^2-x=0$; e) $-x^2+2x=0$; f) $4x^2+3x=0$;

g) $x^2+x-2=0$; h) $4x^2+4x-8=0$; i) $-x^2-x+2=0$.

5. Paveikslėlyje pavaizduotas stačiakampis (S — jo plotas).



Naudodamiesi paveikslėlio duomenimis:

1) Užrašykite lygtį x reikšmei apskaičiuoti.

2) Gautąją lygtį užrašykite kaip $ax^2+bx+c=0$ ir nurodykite koeficientų a, b ir c reikšmes.

3) Tikrindami debesėlyje surašytas x reikšmes, nustatykite, kurios iš jų yra jūsų gautos kvadratinės lygties sprendiniai.

4) Kokio ilgio (centimetrais) yra stačiakampio kraštinės?

−3; −2; −1; 0; 1; 2; 3.

5.2. LYGTIS $ax^2 + bx = 0$

Šiame atverstinyje išmoksime spręsti kvadratines lygtis, kurios neturi laisvojo nario, t. y. lygtis $ax^2 + bx + c = 0$, kuriose $c = 0$.

Užduotis. Imkime kvadratines lygtis, neturinčias laisvojo nario, pavyzdžiui:
a) $x^2 + 5x = 0$; b) $x^2 - x = 0$; c) $2x^2 + 8x = 0$.

Išspręskite kiekvieną tą lygtį, kairiąją jos pusę skaidydami dauginamaisiais.

Išspręskime lygtį $x^2 + 2x = 0$. Prisiminkime, kad $a^2 + ab = a(a + b)$

1) Pastebėkime, kad kairiąją lygties pusę x^2+2x galima išskaidyti dauginamaisiais.
$\underline{x} \cdot x + 2 \cdot \underline{x} = 0,$
$x \cdot (x + 2) = 0$

2) Sandauga lygi 0 tik tada, kai bent vienas iš dauginamųjų (x ar $x + 2$) lygus 0.
$x = 0$ arba $x + 2 = 0$

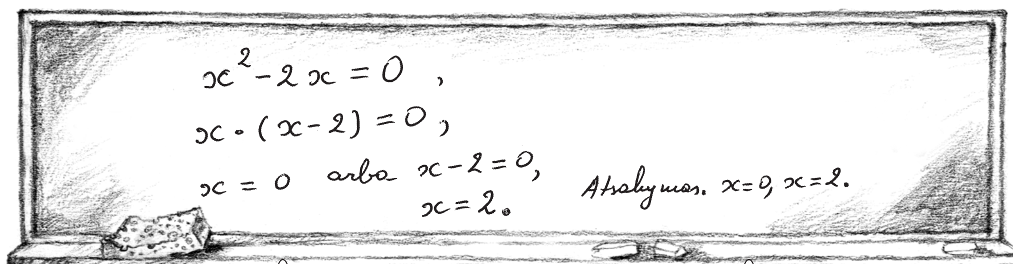
3) Randame x reikšmes, su kuriomis tie dauginamieji lygūs 0.
$x = 0$ arba $x = -2$

Nustatėme, kad yra dvi x reikšmės ($x = 0$ ir $x = -2$), su kuriomis lygtis $x^2 + 2x = 0$ virsta teisinga lygybe.

4) *Pasitikriname.*
- Kai $x = 0$, tai $0^2 + 2 \cdot 0 \stackrel{?}{=} 0$, $0 = 0$ — lygybė *teisinga*.
- Kai $x = -2$, tai $(-2)^2 + 2 \cdot (-2) \stackrel{?}{=} 0$, $4 - 4 = 0$ — lygybė *teisinga*.

Vadinasi, lygtis $x^2 + 2x = 0$ turi du sprendinius: $x = 0$ ir $x = -2$.

5) Parašome atsakymą. *Atsakymas.* $x = 0$, $x = -2$.



Lygties $ax^2 + bx = 0$ sprendinius galima apskaičiuoti reiškinį $ax^2 + bx$ skaidant dauginamaisiais!

6. Kairiąją lygties pusę skaidydami dauginamaisiais, išspręskite lygtį:
a) $x^2 + 4x = 0$; b) $y^2 - 12y = 0$; c) $-2z^2 + 8z = 0$;
d) $x^2 + 4{,}6x = 0$; e) $y^2 - 7{,}02y = 0$; f) $-z^2 - 3{,}4z = 0$;
g) $x^2 + \frac{1}{3}x = 0$; h) $y^2 - \frac{4}{5}y = 0$; i) $-5z^2 + 4\frac{2}{7}z = 0$.

7. Raskite lygties sprendinius.
a) $x^2 = 12x$; b) $y^2 = -8y$; c) $-3z^2 = 4z$;
d) $x^2 = 0{,}2x$; e) $y^2 = 1{,}3y$; f) $-2z^2 = -2{,}8z$;
g) $x^2 = \frac{2}{15}x$; h) $y^2 = -\frac{6}{13}y$; i) $-z^2 = -4\frac{1}{5}z$.

Pirmiausia pasiekite, kad dešinėje lygties pusėje būtų tik 0, t. y. lygtį parašykite taip: $ax^2 + bx = 0$. Pavyzdžiui,
$3x^2 = 4x \mid -4x$, $3x^2 - 4x = 0$, ...

8. Trys draugai sprendė kvadratinę lygtį $-2x^2 + 6x = 0$.

Rimas	*Simas*	*Jonas*
$-2x^2 + 6x = 0,$	$-2x^2 + 6x = 0,$	$-2x^2 + 6x = 0 \mid : (-2),$
$x \cdot (-2x + 6) = 0,$	$-2x \cdot (x - 3) = 0,$	$x^2 - 3x = 0,$
$x = 0$ arba $-2x + 6 = 0,$	$-2x = 0$ arba $x - 3 = 0,$	$x(x - 3) = 0,$
$-2x = -6,$	$x = 0,$ $x = 3.$	$x = 0$ arba $x - 3 = 0,$
$x = 3.$		$x = 3.$

1) Kuris sprendimas jums priimtiniausias?
2) Išspręskite kvadratinę lygtį jums patogiu būdu.
a) $3x^2 - 6x = 0$; b) $4y^2 + 8y = 0$; c) $5z^2 - 15z = 0$;
d) $-2x^2 + 16x = 0$; e) $-12y^2 - 24y = 0$; f) $-6z^2 + 42z = 0$;
g) $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 0$; h) $-\frac{1}{3}y^2 + 8y = 0$; i) $12z = -\frac{1}{12}z^2$;
j) $-8x = -\frac{1}{4}x^2$; k) $7y = -\frac{1}{4}y^2$; l) $-\frac{1}{3}z^2 = \frac{4}{5}z$.

9. Su kuriomis y reikšmėmis duotojo dvinario reikšmė lygi 0?
a) $\frac{2}{3}y^2 + 1{,}4y$; b) $0{,}3y + \frac{1}{2}y^2$; c) $4{,}2y^2 - 3{,}2y$; d) $-y^2 - 1$.

10. Nežinomą skaičių pažymėkite x. Tada sudarykite duotąjį sakinį atitinkančią lygtį. Apskaičiuokite tos lygties sprendinius.
a) Nežinomo skaičiaus kvadratas lygus trečdaliui to nežinomo skaičiaus.
b) Du trečdaliai nežinomo skaičiaus lygūs vienam ketvirtadaliui to nežinomo skaičiaus kvadrato.
Atsakyme nurodykite teigiamąjį nežinomą skaičių.

5.3. LYGTIS $ax^2 + c = 0$

Šiame atverstinyje išmoksime spręsti kvadratines lygtis, kurios neturi nario su x, t. y. lygtis $ax^2 + bx + c = 0$, kuriose $b = 0$.

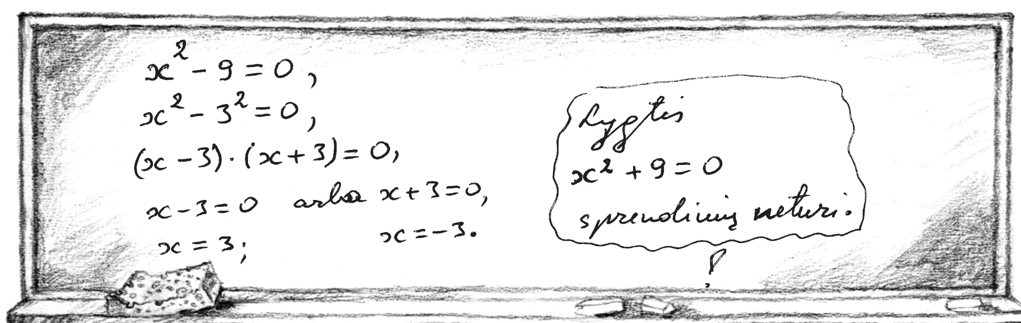
1 užduotis. Išspręskite lygtį, kairiąją jos pusę skaidydami dauginamaisiais.
a) $x^2 - 25 = 0$; b) $x^2 - 100 = 0$.

Išspręskime lygtį $x^2 - 81 = 0$. Prisiminkime, kad $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

1) Pastebėkime, kad kairėje lygties $x^2 - 81 = 0$ pusėje yra dviejų narių (x ir 9) kvadratų skirtumas.	$x^2 - 81 = 0$, $x^2 - 9^2 = 0$
2) Kvadratų skirtumą parašome kaip sandaugą, t. y. kairiąją lygties pusę išskaidome dauginamaisiais.	$(x - 9)(x + 9) = 0$
3) Sandauga lygi 0 tik tada, kai bent vienas iš dauginamųjų lygus 0.	$x - 9 = 0$ arba $x + 9 = 0$
4) Randame x reikšmes, su kuriomis tie dauginamieji lygūs 0.	$x = 9$, $x = -9$
5) Parašome atsakymą.	*Atsakymas.* $x = -9$, $x = 9$.

2 užduotis. Įsitikinkite, kad duotoji lygtis sprendinių neturi.
a) $x^2 + 25 = 0$; b) $x^2 + 100 = 0$.

Išspręskime lygtį $x^2 + 81 = 0$. Samprotauti galima taip:
- su visomis x reikšmėmis x^2 reikšmės yra *ne mažesnės* už 0, t. y. $x^2 \geqslant 0$;
- prie *neneigiamo* skaičiaus (x^2) pridėję *teigiamą* skaičių (81), gausime *teigiamą* skaičių, t. y. $x^2 + 81 > 0$ su visomis x reikšmėmis;
- vadinasi, nėra tokios x reikšmės, su kuria būtų teisinga lygybė $x^2 + 81 = 0$.



$2x \cdot x + (x+1)^2 = 100$ cm²

11. Išspręskite lygtį ir pasitikrinkite, ar teisingai išsprendėte.
a) $x^2 - 4 = 0$; b) $y^2 - 25 = 0$; c) $z^2 - 169 = 0$;
d) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$; e) $y^2 - \frac{1}{25} = 0$; f) $z^2 - \frac{4}{9} = 0$;
g) $x^2 - 0{,}01 = 0$; h) $y^2 - 0{,}25 = 0$; i) $z^2 - 2{,}25 = 0$.

Naudodamiesi pavyzdžiais, išspręskite **12–15** uždavinių lygtis.

12. a) $x^2 = 100$; b) $y^2 = 25$;
c) $x^2 = \frac{1}{4}$; d) $y^2 = \frac{1}{9}$;
e) $x^2 = 4{,}41$; f) $y^2 = 0{,}0001$;
g) $x^2 = \frac{16}{25}$; h) $y^2 = 1\frac{9}{16}$.

$y^2 = 1$,
$y^2 - 1 = 0$,
$(y - 1)(y + 1) = 0$,
....

13. a) $5x^2 - 500 = 0$; b) $2y^2 - 8 = 0$;
c) $-3x^2 + 12 = 0$; d) $-4y^2 + 64 = 0$;
e) $2x^2 = 18$; f) $-5y^2 = -20$;
g) $10x^2 = 0{,}1$; h) $-3y^2 = -\frac{4}{3}$.

$3x^2 - 27 = 0 \mid : 3$,
$x^2 - 9 = 0$,
$(x - 3)(x + 3) = 0$,
....

14. a) $\frac{1}{2}x^2 = 2$; b) $\frac{1}{3}y^2 = 3$;
c) $-\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{9}y^2 = -\frac{4}{9}$;
e) $-\frac{1}{4}x^2 + 1 = 0$; f) $-\frac{1}{5}y^2 + 20 = 0$;
g) $\frac{1}{7}x^2 - \frac{4}{7} = 0$; h) $\frac{1}{11}y^2 - \frac{4}{11} = 0$;
i) $\frac{9}{13} - \frac{1}{13}x^2 = 0$; j) $\frac{4}{7} - \frac{1}{7}y^2 = 0$.

$-\frac{1}{3}x^2 = -27 \mid \cdot (-3)$,
$x^2 = 81 \mid -81$,
$x^2 - 81 = 0$,
$(x - 9)(x + 9) = 0$,
....

15. a) $4x^2 - 9 = 0$;
b) $16x^2 = 9$;
c) $-25x^2 + 9 = 0$;
d) $-81 = -4y^2$;
e) $\frac{4}{9}y^2 = 1{,}69$;
f) $-\frac{4}{9}y^2 = 0$.

I būdas.	*II būdas.*
$9z^2 - 16 = 0$, $(3z)^2 - 4^2 = 0$, $(3z - 4)(3z + 4) = 0$, $3z - 4 = 0$, $3z + 4 = 0$, ...	$9z^2 - 16 = 0 \mid : 9$, $z^2 - \frac{16}{9} = 0$, $\left(z - \frac{4}{3}\right)\left(z + \frac{4}{3}\right) = 0$, $z - \frac{4}{3} = 0$, $z + \frac{4}{3} = 0$, ...

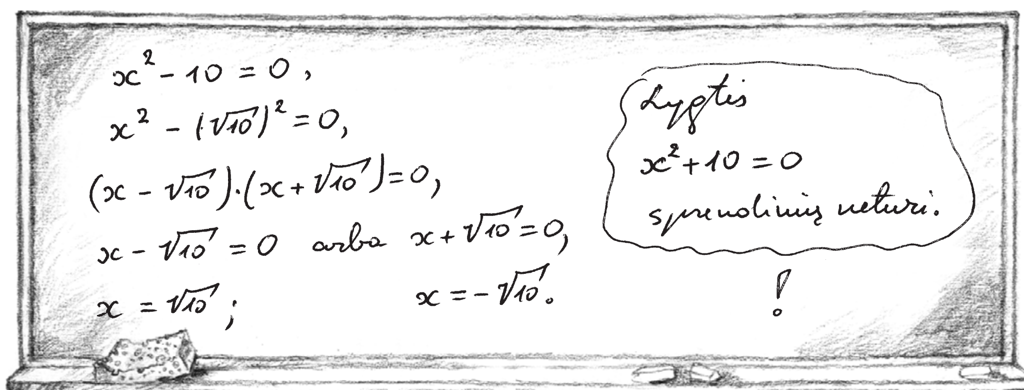
16. Sudarę kvadratinę lygtį, apskaičiuokite, koks skaičius buvo sugalvotas, jei:
a) sugalvotą skaičių pakėlus kvadratu ir atėmus 10 000, buvo gautas 0;
b) sugalvotą skaičių pakėlus kvadratu ir pridėjus 4, buvo gauta 5;
c) sugalvoto skaičiaus kvadratą padauginus iš 2 ir atėmus 12,5, gauta 0;
d) sugalvoto skaičiaus kvadratą padauginus iš −3 ir atėmus −3, gauta 3.

5.4. SPRENDŽIAME SUDĖTINGESNES LYGTIS $ax^2 + c = 0$

1 užduotis. Išspręskite lygtį, kairiąją jos pusę skaidydami dauginamaisiais.
a) $x^2 - 10 = 0$; b) $x^2 - 7 = 0$; c) $x^2 - 2 = 0$.

Išspręskime lygtį $x^2 - 5 = 0$.	Prisiminkime, kad $a = (\sqrt{a})^2$
1) Kairiąją lygties $x^2 - 5 = 0$ pusę parašykime kaip kvadratų skirtumą.	$x^2 - 5 = 0$, $x^2 - (\sqrt{5})^2 = 0$
2) Kvadratų skirtumą $x^2 - (\sqrt{5})^2$ pakeiskime sandauga.	$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$
3) Sandauga lygi nuliui tik tada, kai bent vienas iš dauginamųjų lygus 0.	$x - \sqrt{5} = 0$ arba $x + \sqrt{5} = 0$, $x = \sqrt{5}$; $x = -\sqrt{5}$.
4) Parašykime atsakymą.	*Atsakymas.* $x = \sqrt{5}$, $x = -\sqrt{5}$.

2 užduotis. Įsitikinkite, kad duotoji lygtis sprendinių neturi.
a) $x^2 + 10 = 0$; b) $x^2 + 7 = 0$; c) $x^2 + 2 = 0$.



3 užduotis. Nustatykite lygties sprendinius.
a) $2x^2 - 20 = 0$; b) $2x^2 + 20 = 0$; c) $\frac{1}{2}x^2 - 5 = 0$; d) $\frac{3}{2}x^2 + 15 = 0$.

$7x^2 - 70 = 0 \mid : 7$,
$x^2 - 10 = 0$,
....

$\frac{1}{7}x^2 + \frac{10}{7} = 0 \mid \cdot 7$,
$x^2 + 10 = 0$,
....

17. Išspręskite lygtį ir pasitikrinkite, ar teisingai išsprendėte.
a) $x^2 - 3 = 0$; b) $y^2 - 6 = 0$; c) $z^2 - 11 = 0$;
d) $x^2 - \frac{1}{2} = 0$; e) $y^2 - \frac{1}{3} = 0$; f) $z^2 - \frac{1}{10} = 0$;
g) $x^2 - 0{,}1 = 0$; h) $y^2 - 1{,}7 = 0$; i) $z^2 - 2{,}3 = 0$.

Išspręskite **18–20** uždavinių lygtis.

18. a) $x^2 - 12 = 0$; b) $y^2 - 24 = 0$;
c) $20 - x^2 = 0$; d) $27 - y^2 = 0$;
e) $x^2 = 108$; f) $y^2 = 54$;
g) $-x^2 = -125$; h) $-18 = -y^2$;
i) $x^2 = 0{,}001$; j) $y^2 = \frac{1}{125}$.

$z^2 - 8 = 0$,
$z^2 - (\sqrt{8})^2 = 0$,
$(z - \sqrt{8})(z + \sqrt{8}) = 0$,
$z - \sqrt{8} = 0$ arba $z + \sqrt{8} = 0$,
$z = \sqrt{8}$, $z = -\sqrt{8}$,
$z = \sqrt{4 \cdot 2}$, $z = -\sqrt{4 \cdot 2}$,
$z = 2\sqrt{2}$; $z = -2\sqrt{2}$.

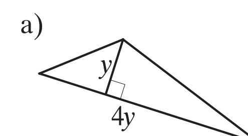
19. a) $x^2 - \frac{2}{25} = 0$; b) $y^2 - \frac{81}{3} = 0$;
c) $x^2 = \frac{9}{2}$; d) $y^2 = \frac{7}{100}$;
e) $-x^2 = -\frac{16}{3}$; f) $-y^2 = -\frac{3}{16}$;
g) $x^2 = 1\frac{4}{9}$; h) $y^2 = 2\frac{5}{16}$;
i) $-2\frac{1}{25} = -x^2$; j) $-3\frac{1}{4} = -y^2$.

$x^2 - \frac{100}{3} = 0$,
$x^2 - \left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right)^2 = 0$,
$\left(x - \sqrt{\frac{100}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{100}{3}}\right) = 0$,
$x - \sqrt{\frac{100}{3}} = 0$ arba $x + \sqrt{\frac{100}{3}} = 0$,
$x = \sqrt{\frac{100}{3}}$, $x = -\sqrt{\frac{100}{3}}$,
$x = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{3}}$, $x = -\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{3}}$,
$x = \frac{10}{\sqrt{3}}$; $x = -\frac{10}{\sqrt{3}}$.

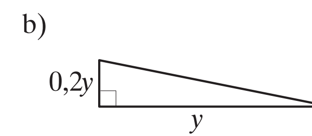
20. a) $2x^2 - 9 = 0$; b) $3x^2 - 25 = 0$; c) $5x^2 - 16 = 0$;
d) $6x^2 = 4$; e) $7x^2 = 100$; f) $11x^2 = 144$;
g) $-25 = -3x^2$; h) $-49 = -17x^2$; i) $-121 = -5x^2$.

21. Skritulio plotas lygus 36 cm^2. Kvadrato plotas didesnis už skritulio plotą 12 cm^2. Apskaičiuokite kvadrato kraštinės ilgį.

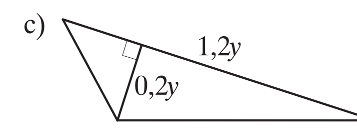
22. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite y reikšmę.

a)


$S_\triangle = 5$ cm^2

b)


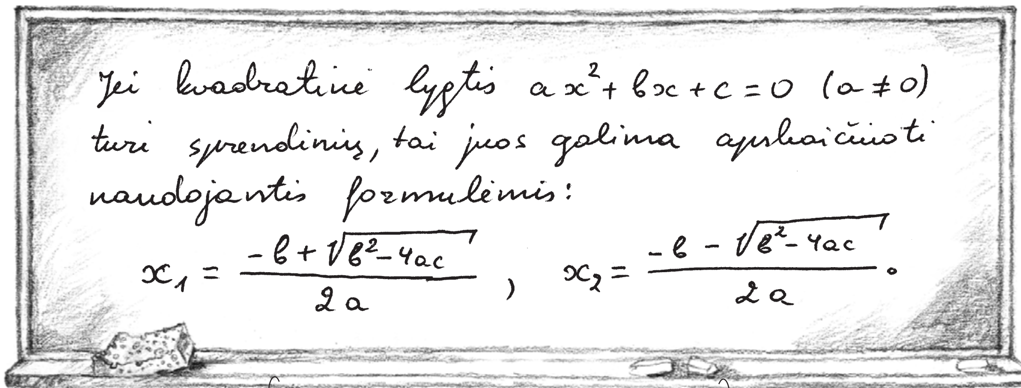
$S_\triangle = 12$ mm^2

c)


$S_\triangle = 2$ m^2

23. Raskite teigiamą skaičių, kurio dvigubą kvadratą sumažinę 16 vienetų, gausime 0.

5.5. KVADRATINĖS LYGTIES SPRENDINIŲ FORMULĖS



Reiškinys b^2-4ac vadinamas kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ diskrimin**á**ntu. Jis žymimas raide D.

Užduotis. Išspręskite kvadratinę lygtį $x^2-5x+6=0$.

1) Nurodykite lygties koeficientùs a, b, c.
2) Apskaičiuokite diskriminantą D, t. y. reiškinio b^2-4ac reikšmę.
3) Iš diskriminanto ištraukite kvadratinę šaknį: $\sqrt{D}$.
4) Apskaičiuokite vieną lygties sprendinį: $x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.
5) Apskaičiuokite antrą lygties sprendinį: $x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.
6) Patikrinkite, ar gautosios x reikšmės tenkina lygtį.
7) Parašykite atsakymą.

$x^2+x-2=0$,

$a=1,\ b=1,\ c=-2$;

$D=b^2-4ac=1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$;

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$,

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2$.

Pasitikriname: kai $x=1$, tai $1^2+1-2=0$ — lygybė teisinga;

kai $x=-2$, tai $(-2)^2+(-2)-2=0$ — lygybė teisinga.

Atsakymas. $x=1$, $x=-2$.

24. Duota kvadratinė lygtis:

a) $2x^2+3x+1=0$; b) $2x^2-3x+1=0$; c) $2x^2+5x+2=0$;
d) $2x^2-7x+3=0$; e) $3x^2+11x+6=0$; f) $4x^2-11x+6=0$;
g) $x^2+x-30=0$; h) $x^2-x-12=0$; i) $x^2-x-20=0$;
j) $3x+2x^2+1=0$; k) $-1+3x-2x^2=0$; l) $2x^2+3+7x=0$.

1) Užrašykite lygtį kaip $ax^2+bx+c=0$ ir nurodykite koeficientus a, b ir c.
2) Apskaičiuokite diskriminanto reikšmę.
3) Raskite, kam lygi kvadratinė šaknis iš diskriminanto.
4) Apskaičiuokite lygties sprendinius.

25. Apskaičiuokite lygties sprendinius.

a) $x^2-\frac{1}{2}x-3=0$; b) $x^2+\frac{1}{2}x-3=0$; c) $x^2-\frac{5}{3}x-26=0$;
d) $x^2+2\frac{1}{2}x+1=0$; e) $x^2-4\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}=0$; f) $4x^2-2\frac{2}{5}x-13=0$;
g) $7x+3x^2-2=0$; h) $x^2+\frac{5}{4}-3x=0$; i) $-4-\frac{3}{2}x^2-7x=0$.

Apskaičiuokime lygties $2x^2+\frac{1}{2}x-1{,}5=0$ sprendinius.

I būdas.

$2x^2+\frac{1}{2}x-1{,}5=0$,

$a=2,\ b=\frac{1}{2},\ c=-1{,}5$,

$D=b^2-4ac=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot 2\cdot(-1{,}5)=$
$=12\frac{1}{4}$,

$\sqrt{D}=\sqrt{12\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$,

$x_1=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}}{2\cdot 2}=\frac{-4}{4}=-1$,

$x_2=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}$.

II būdas.

$2x^2+\frac{1}{2}x-1{,}5=0\ \big|\cdot 2$,

$4x^2+x-3=0$,

$a=4,\ b=1,\ c=-3$,

$D=b^2-4ac=1^2-4\cdot 4\cdot(-3)=$
$=49$,

$\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$,

$x_1=\frac{-1-7}{2\cdot 4}=\frac{-8}{8}=-1$,

$x_2=\frac{-1+7}{2\cdot 4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

26. Apskaičiuokite kvadratinės lygties nežinomą koeficientą, kai žinomas tos lygties diskriminantas D.

a) $x^2+x+c=0,\ D=49$; b) $ax^2+5x+4=0,\ D=9$;
c) $x^2+bx+10=0,\ D=9$; d) $2x^2-3x+c=0,\ D=-7$;
e) $ax^2-x-1=0,\ D=-3$; f) $-x^2+bx+3=0,\ D=13$.

5.6. KVADRATINĖS LYGTIES SPRENDINIŲ SKAIČIUS

- Kvadratinė lygtis gali turėti du skirtingus sprendinius.
- Kvadratinė lygtis gali turėti vieną sprendinį.
- Kvadratinė lygtis gali neturėti nė vieno sprendinio.

Kiek sprendinių turi kvadratinė lygtis, galima nustatyti pagal jos diskriminantą!



Užduotis. Duotos trys kvadratinės lygtys:

I $x^2 + 2x - 8 = 0$ II $x^2 - 6x + 9 = 0$ III $x^2 + 3x + 5 = 0$

1) Apskaičiuokite I lygties diskriminantą. Raskite tos lygties sprendinius. Kiek skirtingų sprendinių turi ta lygtis? Palyginkite diskriminanto reikšmę su 0 ir parašykite ženklą $>$, $<$ arba $=$:

   D ☐ 0.

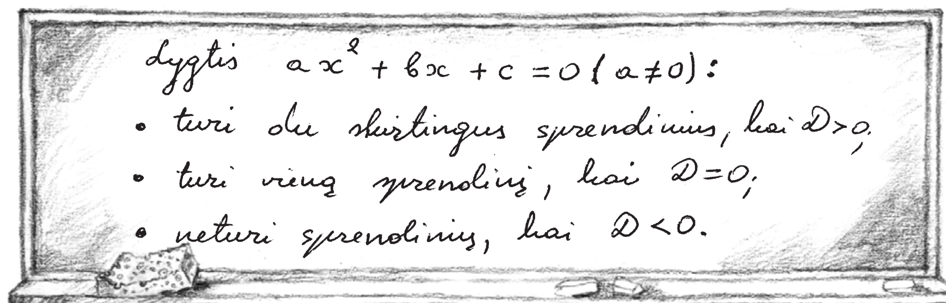
2) Apskaičiuokite II lygties diskriminantą. Raskite tos lygties sprendinius. Kiek skirtingų sprendinių turi ta lygtis? Palyginkite diskriminanto reikšmę su 0 ir parašykite ženklą $>$, $<$ arba $=$:

   D ☐ 0.

3) Apskaičiuokite III lygties diskriminantą. Ar turi prasmę kvadratinė šaknis iš to diskriminanto? Paaiškinkite kodėl. Palyginkite diskriminanto reikšmę su 0 ir parašykite ženklą $>$, $<$ arba $=$:

   D ☐ 0.

4) Remdamiesi išspręstais pavyzdžiais, pasakykite, kaip nuo diskriminanto ženklo priklauso kvadratinės lygties sprendinių skaičius.



x $2x \cdot x$ $+$ $(x+1)^2$ $= 100$ cm² ($2x$, $x+1$)

27. Apskaičiuokite kvadratinės lygties diskriminantą, o tada nurodykite, kiek sprendinių turi ta lygtis.

a) $2x^2 + 5x - 7 = 0$; b) $3x^2 - 7x + 8 = 0$;
c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; d) $9x^2 - 6x + 2 = 0$;
e) $2x^2 + x + 67 = 0$; f) $x^2 + 12x + 36 = 0$;
g) $-4 - 2x^2 + 7x = 0$; h) $-3x^2 - 5 + x = 0$;
i) $-10 + 12x - 3x^2 = 0$; j) $-5 + x^2 = 0$.

28. Persibraižykite ir užpildykite lentelę.

Kvadratinė lygtis	Koeficientai			Diskrimi-nantas	Sprendinių skaičius	Sprendiniai	
	a	b	c			$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$	$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$
$x^2 + x + 10 = 0$	1	1	10	-39	0	–	–
$3x^2 + 2x - 7 = 0$	3	2	-7	88	2	$\frac{-1-\sqrt{22}}{3}$	$\frac{-1+\sqrt{22}}{3}$
$x^2 - 14x + 49 = 0$	1	-14	49	0	1	7	–
$4x^2 + 6x + 9 = 0$							
$2x^2 - 3x + 1 = 0$							
$x^2 + 16x + 48 = 0$							
$x^2 - x - 7 = 0$							
$2x^2 + 3x - 2 = 0$							
$-2x^2 + x + 3 = 0$							

29. Kvadratinė lygtis $x^2 - 2x + c = 0$ turi du skirtingus sprendinius.

1) Ar tos lygties koeficientas c gali būti lygus
   a) 0? b) -1? c) 1? d) 5?
2) Nurodykite visų galimų c reikšmių intervalą.

30. Užrašykite kokią nors kvadratinę lygtį $ax^2 + bx + c = 0$, kuri:
a) turėtų du skirtingus sprendinius; b) turėtų vienintelį sprendinį;
c) neturėtų sprendinių; d) turėtų du sprendinius $x = 1$, $x = 2$.

Užrašykime kvadratinę lygtį $ax^2 + bx + c = 0$, kurios sprendiniai yra $x = 3$ ir $x = -2$:
$(x - 3) \cdot (x + 2) = 0$,
$x^2 + 2x - 3x - 6 = 0$,
$x^2 - x - 6 = 0$.



5.7. SUDĖTINGESNĖS KVADRATINĖS LYGTYS

Užduotis. Išspręskite lygtį.

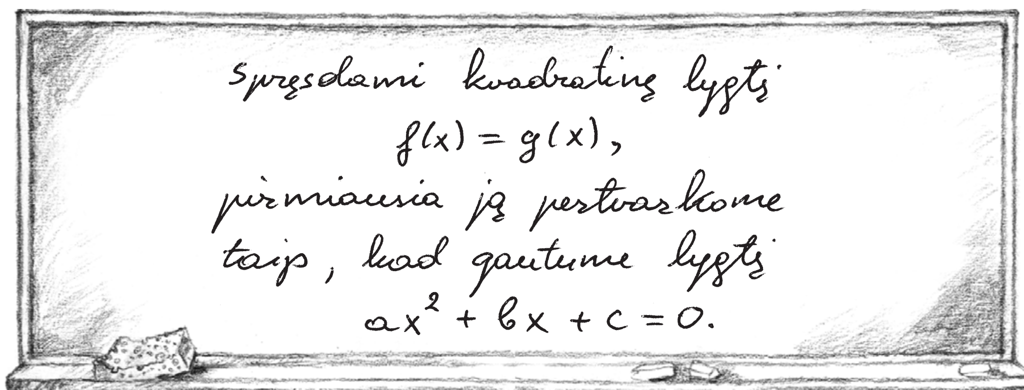
a) $x^2 - 25 = x - 5$;   b) $x(x-3) = 2$;   c) $10x^2 = 2(9x+2)$.

Išspręskime lygtį $x^2 + 5x = 2(5x - 3)$

1) Atskliauskime, t. y. $5x - 3$ padauginkime iš 2.	$x^2 + 5x = 2(5x-3)$, $x^2 + 5x = 10x - 6$
2) Iš abiejų lygties $x^2 + 5x = 10x - 6$ pusių atimkime reiškinį $10x - 6$, kad dešinėje lygties pusėje liktų 0.	$x^2 + 5x = 10x - 6 \mid -(10x-6)$, $x^2 + 5x - 10x + 6 = 0$
3) Kairėje lygties $x^2 + \underline{5x} - \underline{10x} + 6 = 0$ pusėje sutraukime panašiuosius narius.	$x^2 - 5x + 6 = 0$
4) Raskime lygties sprendinius x_1 ir x_2.	$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$, $x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

5) *Pasitikrinkime.*
Kai $x = 3$, tai $3^2 + 5 \cdot 3 = 2 \cdot (5 \cdot 3 - 3)$ — lygybė teisinga.
Kai $x = 2$, tai $2^2 + 5 \cdot 2 = 2 \cdot (5 \cdot 2 - 3)$ — lygybė teisinga.

6) Parašykime atsakymą.   *Atsakymas.* $x = 3$, $x = 2$.



$x \cdot 2x + (x+1)^2 = 100$ cm²

31. Išspręskite lygtį ir pasitikrinkite, ar teisingai išsprendėte.

a) $x^2 - 4x = x - 6$;   b) $x^2 + 2x = 5 - 2x$;   c) $x^2 + x = 24 - 4x$;

d) $x^2 + 5x = 4x + 42$;   e) $8x^2 + 2x = -8x - 3$;   f) $2x^2 - 4x = 2 - x$.

32. Su kuriomis y reikšmėmis:

a) trìnaris $y^2 - 11y + 31$ įgyja reikšmę, lygią 1?

b) daugiãnarių $y^2 - 5y - 3$ ir $2y - 5$ reikšmės yra lygios?

c) dvìnario $7y + 1$ reikšmės lygios trinario $3y^2 - 2y + 1$ reikšmėms?

d) trinario $-2y^2 + 5y + 6$ reikšmės lygios dvinario $4y^2 + 5y$ reikšmėms?

33. Išspręskite lygtį.

a) $\frac{x^2-1}{2} - x = 2$;

b) $\frac{x^2-4}{8} - \frac{2x+3}{5} = 1$;

c) $\frac{x^2+3}{6} - \frac{x+4}{3} = 5$;

d) $\frac{3x+4}{5} - \frac{x^2-4x-6}{10} = -1$;

e) $\frac{x^2+2x+1}{12} - \frac{7-x}{4} = \frac{x}{2}$;

f) $\frac{3-x}{5} = \frac{x-2}{4} + \frac{x^2-4x+4}{8}$.

$\frac{x^2}{5}^{(6} - \frac{x+5}{6}^{(5} = \frac{2x}{3}^{(10} \mid \cdot 30$,
$6x^2 - 5(x+5) = 20x$,
$6x^2 - 5x - 25 = 20x \mid -20x$,
$6x^2 \underline{-5x} - 25 \underline{-20x} = 0$,
$6x^2 - 25x - 25 = 0$,
$x_1 = \frac{25-35}{12} = -\frac{5}{6}$,
$x_2 = \frac{25+35}{12} = 5$.

34. Raskite lygties sprendinius.

a) $x(x-1) = 72$;   b) $y(y+1) = 56$;   c) $z(z-8) = -15$;

d) $x(3x-1) - 3 = 1$;   e) $y(2y-1) - 1 = 2$;   f) $z(3z+11) - 4 = 10$;

g) $3x\left(x + \frac{4}{3}\right) = -20$;   h) $5y\left(y + \frac{4}{5}\right) - 28 = 0$;   i) $2z\left(z - \frac{3}{2}\right) = -1$.

35. Su kuriomis nežinomojo reikšmėmis duotoji lygybė yra teisinga?

a) $(x-5)^2 = 225$;   b) $(x+8)^2 = 169$;   c) $(2x-1)^2 = 4$;

d) $(3-5x)^2 = 81$;   e) $4(x+3)^2 = 12$;   f) $\frac{1}{2}(x-4)^2 = 5$.

$(x-1)^2 = 9$.

I būdas. Lygybė teisinga tik tada, kai $x - 1 = 3$ arba $x - 1 = -3$, nes $3^2 = 9$ ir $(-3)^2 = 9$. Vadinasi, $x_1 = 4$, $x_2 = -2$.

II būdas. $x^2 - 2x + 1 = 9$, $x^2 - 2x - 8 = 0$, $D = 36$, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

III būdas. $(x-1)^2 - 9 = 0$, $(x-1)^2 - 3^2 = 0$, $(x-1-3) \cdot (x-1+3) = 0$, $(x-4)(x+2) = 0$; $x - 4 = 0$ arba $x + 2 = 0$; $x_1 = 4$, $x_2 = -2$.

36. Raskite lygties sprendinių sumą ir sandaugą.

a) $\frac{x(x-3)}{6} - \frac{x}{2} = 0$;   b) $\frac{x(x+1)}{3} + \frac{8+x}{4} = 2$;   c) $\frac{(x+1)(x-1)}{2} - \frac{x-1}{3} = 1$.

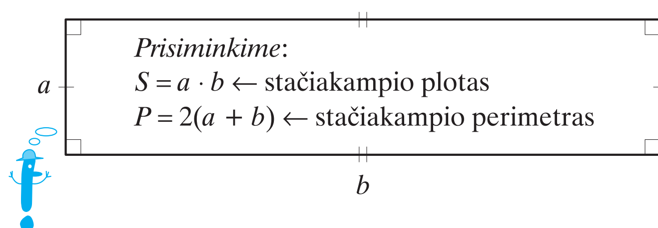
5.8. TEKSTINIAI UŽDAVINIAI

Užduotis. Prieš pradėdami mokytis šį skyrių, nemokėjome spręsti uždavinio:

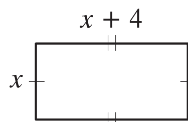
Apskaičiuokite stačiakampio perimetrą, jei žinoma, kad viena jo kraštinė 14 m *ilgesnė už kitą, o plotas lygus* 480 m^2 (žr. 4 psl., 3 UŽDAVINYS).

Išspręskite jį dabar.

Sąlyga. *Stačiakampio ilgis* 4 cm *didesnis už jo plotį, o plotas lygus* 60 cm^2. *Apskaičiuokime stačiakampio perimetrą.*



Sprendimas.



1) Stačiakampio plotį pažymėkime x cm.
Tada jo ilgis yra $(x + 4)$ cm.

2) Kadangi to stačiakampio plotas lygus 60 cm^2, tai teisinga tokia lygybė:
$x(x + 4) = 60$.

3) Išsprendžiame sudarytąją lygtį:
$x(x + 4) = 60$,
$x^2 + 4x = 60$,
$x^2 + 4x - 60 = 0$, $\quad D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60) = 256$, $\quad \sqrt{D} = \sqrt{256} = 16$,
$x_1 = \frac{-4+16}{2} = \frac{12}{2} = 6$, $\quad x_2 = \frac{-4-16}{2} = \frac{-20}{2} = -10$.

4) Pagal uždavinio prasmę kraštinės ilgis x negali būti *neigiamas* skaičius, todėl lygties sprendinys $x = -10$ *netinka*.

Vadinasi, stačiakampio plotis yra 6 cm. Tada jo ilgis yra
$6 + 4 = 10$ (cm).

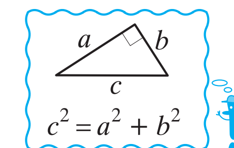
Pasitikriname. Stačiakampio, kurio kraštinių ilgiai yra 6 cm ir 10 cm, plotas lygus $6 \cdot 10 = 60$ (cm^2). Tai atitinka sąlygos duomenis.

5) Apskaičiuojame stačiakampio perimetrą:
$P = 2 \cdot (6 + 10) = 2 \cdot 16 = 32$ (cm).

Atsakymas. Stačiakampio perimetras lygus 32 cm.

37. Reikia aptverti stačiakampį sklypą, kurio vienas kraštas 10 m ilgesnis už kitą. Sklypo plotas lygus 1200 m^2. Apskaičiuokite tvoros ilgį.

38. Apskaičiuokite stačiakampio plotą, jei viena stačiakampio kraštinė yra 14 cm ilgesnė už kitą, o įstrižainės ilgis yra 34 cm.



39. Stačiakampio plotis sudaro 75% jo ilgio. Apskaičiuokite šio stačiakampio perimetrą, jei jo plotas lygus 48 cm^2.

40. Skaičių 120 išreikškite sandauga dviejų skaičių, kurių pirmasis 2 vienetais mažesnis už antrąjį.

41. Dviejų vienas po kito einančių natūraliųjų skaičių sandauga 109 vienetais didesnė už jų sumą. Raskite šiuos skaičius.

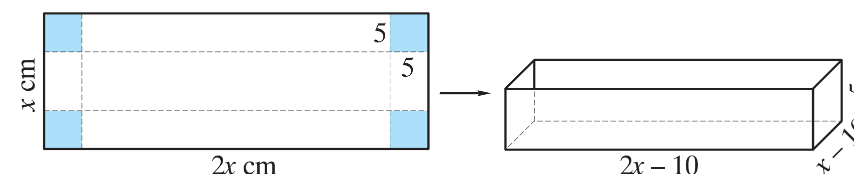
42. Apskaičiuokite stačiojo trikampio statinių ilgius, jei vienas jų 4 cm trumpesnis už kitą, o įžambinės ilgis yra 20 cm.

43. Salėje iš viso yra 884 vietos. Vietų skaičius eilėje yra 8 vienetais didesnis už eilių skaičių. Kiek eilių yra salėje?

44. Paveikslėlį 12 cm × 18 cm užklijavus ant lapo, kurio plotas lygus 280 cm^2, susidarė vienodo pločio rėmeliai. Koks rėmelių plotis?



45. Paveikslėlyje parodyta, kaip iš stačiakampio kartono lapo padaryta atvira dėžutė: lapo kampuose iškirpti kvadratėliai, kurių kraštinės lygios 5 cm, ir susidarę kraštai užlenkti. Kokio dydžio buvo kartono lapas, jeigu jo ilgis buvo dvigubai didesnis už plotį, o gautos dėžutės tūris lygus 1500 cm^3?



46. Iš uosto vienu metu išplaukė du garlaiviai: vienas į šiaurę, antras — į rytus. Po 2 valandų atstumas tarp jų buvo 60 km. Raskite kiekvieno garlaivio greitį, jei vienas jų per valandą nuplaukia 6 km daugiau negu kitas.

47. Jeigu kiekvienas šachmatų turnyro dalyvis sužaistų po vieną partiją su kiekvienu kitu dalyviu, tai iš viso būtų sužaista 231 partija. Kiek yra turnyro dalyvių?

APIBENDRINAME

Lygtys, kurias galima užrašyti kaip

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kuriose a, b, c — skaičiai ($a \neq 0$), x — nežinomasis, vadinamos *kvadrãtinėmis lygtimìs*.

$5x^2 - x + 1 = 0$
$a = 5,\ b = -1,\ c = 1$

Kvadratinės lygtys, kuriose:
- arba $b = 0 \to ax^2 + c = 0$,
- arba $c = 0 \to ax^2 + bx = 0$,
- arba ir b, ir $c = 0 \to ax^2 = 0$,

vadinamos *nepilnõsiomis kvadrãtinėmis lygtimìs*.

$x^2 - 9 = 0$ ($a = 1$, $b = 0$, $c = -9$)
$x^2 + 3x = 0$ ($a = 1$, $b = 3$, $c = 0$)
$2x^2 = 0$ ($a = 2$, $b = 0$, $c = 0$)

Nepilnoji kvadratinė lygtis $ax^2 = 0$ turi vieną sprendinį: $x = 0$.

$2x^2 = 0$,
$x = 0$.

Nepilnoji kvadratinė lygtis $ax^2 + bx = 0$ turi du sprendinius: $x_1 = 0$ ir $x_2 = -\frac{b}{a}$. Ją patogu spręsti kairiąją pusę skaidant dauginamaisiais:
$ax^2 + bx = 0$,
$x(ax + b) = 0$,
$x = 0$ arba $ax + b = 0$,
$x = -\frac{b}{a}$.

$x^2 + 3x = 0$,
$x(x + 3) = 0$,
$x = 0$ arba $x + 3 = 0$,
$x = -3$.

Nepilnoji kvadratinė lygtis $ax^2 + c = 0$ gali arba turėti du skirtingus sprendinius $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ ir $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, arba neturėti sprendinių:
- kai $-\frac{c}{a} > 0$, tai lygtis turi du sprendinius;
- kai $-\frac{c}{a} < 0$, tai lygtis sprendinių neturi.

$4x^2 - 16 = 0$,
$x^2 - 4 = 0$,
$x^2 - 2^2 = 0$,
$(x - 2)(x + 2) = 0$,
$x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

$4x^2 + 16 = 0$,
$x^2 + 4 = 0$, sprendinių nėra.

Lygties $ax^2 + c = 0$ (kur $-\frac{c}{a} > 0$) sprendinius galima rasti kairiąją pusę skaidant dauginamaisiais pagal formulę
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$x^2 - 2 = 0$,
$x^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$,
$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$,
$x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

Pilnąją kvadratinę lygtį patogu spręsti naudojantis diskriminantu.
$ax^2 + bx + c = 0$
$D = b^2 - 4ac$ — diskriminantas
- Kai $D > 0$, tai
  $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ — du sprendiniai.
- Kai $D = 0$, tai
  $x = \frac{-b}{2a}$ — vienas sprendinys.
- Kai $D < 0$, tai lygtis sprendinių neturi.

$x^2 - 5x + 6 = 0$,
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$,
$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$,
$x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$.

$x^2 - 4x + 4 = 0$, $D = 0$, $x = 2$.

$x^2 - 5x + 7 = 0$,
$D = -3$, sprendinių nėra.

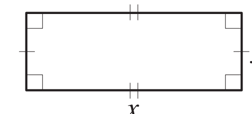
Dar kartą uždavinys apie stačiakampį sklypą

Grįžkime prie jau du kartus minėto uždavinio (žr. 4 psl. ir 20 psl.).

Sąlyga. Stačiakampio sklypo vienas kraštas yra 14 m ilgesnis už kitą kraštą. To sklypo plotas lygus 480 m². Kam lygūs to sklypo kraštų ilgiai?

Sprendimas.

1) Vieno krašto ilgį pažymėkime x, kito — y.
2) Pagal sąlygą: $x - y = 14$.
3) Pagal sąlygą: $x \cdot y = 480$.
4) Sudarome lygčių sistemą:



$$\begin{cases} x - y = 14, \\ x \cdot y = 480. \end{cases}$$

Tokias sistemas mokysimės spręsti 10 klasėje. Bet pabandykime ją išspręsti dabar.

5) Iš sistemos pirmos lygties išreikškime x ir tą išraišką įstatykime į antrą lygtį.

$$\begin{cases} x = 14 + y, \\ (14 + y) \cdot y = 480; \end{cases} \to \begin{cases} x = 14 + y, \\ y^2 + 14y - 480 = 0. \end{cases}$$

6) Išsprendžiame gautą kvadratinę lygtį:

$$y^2 + 14y - 480 = 0, \quad D = 2116, \sqrt{D} = 46,$$
$$y_1 = -30 \text{ (netinka pagal uždavinio prasmę)}, y_2 = 16.$$

Vadinasi, $y = 16$.

7) Apskaičiuojame x reikšmę: $x = 14 + y = 14 + 16 = 30$.

Atsakymas. Sklypo kraštai lygūs 16 m ir 30 m.

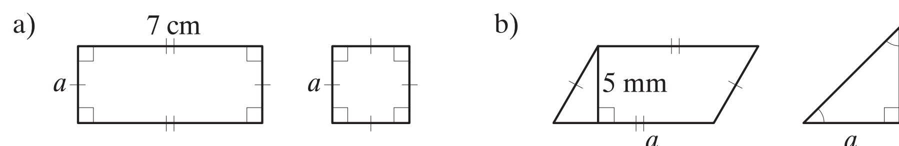
SPRENDŽIAME

48. Parašykite duotąją lygtį kaip $ax^2+bx+c=0$ ir nurodykite koeficientų a, b ir c reikšmes.
a) $2x(x+2)=8x+3$; b) $x(x-15)=3\cdot(108-5x)$;
c) $\frac{x^2-1}{5}=5$; d) $\frac{9-x^2}{5}=x$;
e) $\frac{2x^2+x}{3}-\frac{2-3x}{4}=\frac{x^2-6}{6}$; f) $\frac{x^2+x}{4}-\frac{3-7x}{20}=0{,}3$.

49. Išspręskite kvadratinę lygtį, neturinčią laisvojo nario.
a) $4{,}2x-x^2=0$; b) $-3{,}4y+y^2=0$; c) $z^2-17{,}6z=0$;
d) $1{,}2x^2=4{,}2x$; e) $3{,}6y^2=-4y$; f) $3{,}2z^2=\frac12 z$;
g) $\frac15 x+x^2=0$; h) $1\frac25 y+y^2=0$; i) $z^2-15\frac27 z=0$;
j) $\frac12 x=4x^2$; k) $-2\frac23 y^2=\frac12 y$; l) $-74z=-\frac27 z^2$;
m) $-\frac25 x^2-3x=0$; n) $-1\frac25 y^2+y=0$; o) $4{,}2z-\frac15 z^2=0$.

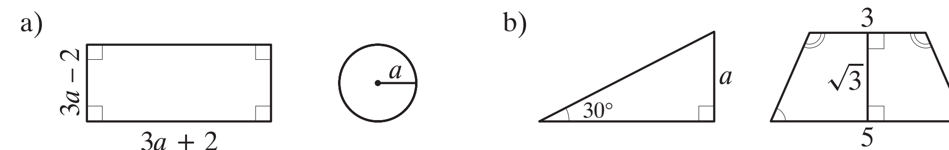
50. Su kuria nelygia nuliui x reikšme:
a) du trečdaliai nežinomo skaičiaus x kvadrato lygūs dvigubam tam nežinomam skaičiui?
b) penktadalis nežinomo skaičiaus x lygus trigubam to nežinomo skaičiaus kvadratui?
c) 22% nežinomo skaičiaus x ir pusė to nežinomo skaičiaus kvadrato skirtumas lygus 0?

51. Su kuria a reikšme pavaizduotų figūrų plotai yra lygūs?



52. Raskite nepilnosios kvadratinės lygties neigiamą sprendinį.
a) $\frac12 x^2=8$; b) $-\frac13 y^2=3$; c) $-4=-\frac19 z^2$;
d) $x^2=\frac23$; e) $-y^2=1\frac12$; f) $z^2=-4\frac23$;
g) $2x^2=1{,}2$; h) $-y^2=7{,}2$; i) $\frac12 z^2=-6{,}4$;
j) $x^2-1\frac45=0$; k) $-y^2-1\frac19=0$; l) $-3z^2=-2\frac23$.

53. Su kuria a reikšme pavaizduotų figūrų plotai yra lygūs (π reikšmę imkite lygią 3)?



54. Raskite teigiamą lygties sprendinį.
a) $\frac{x^2-1}{5}=5$; b) $\frac{9-x^2}{6}=1$;
c) $4=\frac{y^2-5}{2}$; d) $-7=\frac{y^2-1}{3}$;
e) $\frac{-z^2+1}{4}=1$; f) $5=\frac{1-z^2}{5}$;
g) $\frac{x^2+1}{2}=4$; h) $\frac{x^2+1}{3}=5$.

$\frac{x^2-3}{4}=5 \mid \cdot 4$,
$x^2-3=20 \mid -20$,
$x^2-23=0$,
$(x-\sqrt{23})(x+\sqrt{23})=0$,
$x-\sqrt{23}=0$ arba $x+\sqrt{23}=0$,
$x=\sqrt{23}$; $x=-\sqrt{23}$.

55. Išspręskite lygtį.
a) $\frac{4y^2-5}{6}-\frac{2y^2-3}{4}=3$; b) $\frac{5y^2+9}{6}-\frac{4y^2-9}{5}=3$;
c) $\frac{3y^2-11}{8}+\frac{74-2y^2}{12}=10$; d) $\frac{8y^2-3}{5}+\frac{9y^2-5}{4}=2$;
e) $\frac{y^2-1}{2}=\frac{2y^2-3}{5}+1$; f) $\frac{y^2-5}{4}-\frac{15-y^2}{5}=\frac{y^2-4}{3}$;
g) $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{5}$; h) $-\frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{3}=-\frac{x^2-1}{4}+\frac{x-1}{6}$.

56. Išspręskite lygtį.
a) $4x^2-\frac43 x+\frac19=0$; b) $\frac{1}{25}y^2-\frac65 y+9=0$;
c) $(2z-3)^2=11z-19$; d) $(x+2)^2=3131-2x$;
e) $15x^2+17=15(x+1)^2$; f) $(y-2)^2+48=(2-3y)^2$;
g) $\frac{x^2-1}{2}-11x=11$; h) $\frac{z^2+z}{2}=\frac{8z-7}{3}$.

57. Su kuriomis y reikšmėmis:
a) dvinarių y^2-6y ir $5y-18$ reikšmės yra lygios?
b) trinarių $3y^2-4y+3$ ir y^2+y+1 reikšmės yra lygios?
c) trinaris $3y^2-8y-2$ įgyja reikšmę, lygią 1?
d) dvinario $y-1$ kvadratas lygus $1\frac{11}{25}$?
e) dvinario $5y+1$ kvadratas lygus 0?
f) dvinario $-11y-11$ kvadratas lygus -11?

58. Raskite lygties sprendinius.

a) $(4-x)^2 = 1$; b) $(4+x)^2 = -16$;

c) $(2{,}5-x)^2 = 1{,}44$; d) $(4{,}5+x)^2 = 0{,}01$;

e) $\left(3\frac{2}{5}+x\right)^2 = \frac{1}{4}$; f) $\left(x-1\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{4}{9}$;

g) $2(5y-2{,}1)^2 - 2{,}88 = 0$; h) $-3(5-3{,}2z)^2 - 3{,}63 = 0$;

i) $2\left(4-\frac{1}{3}x\right)^2 - 100 = 0$; j) $-\left(7-\frac{2}{3}y\right)^2 + \frac{3}{8} = 0$.

Išspręskime lygtį $(x-1)^2 = 25$.

I būdas

$(x-1)^2 - 25 = 0$,

$(x-1)^2 - 5^2 = 0$,

$(x-1-5)(x-1+5) = 0$,

$x-6=0$, $x+4=0$,

$x=6$, $x=-4$.

II būdas

$x^2-2x+1=25$,

$x^2-2x-24=0$,

$D = 4+96 = 100$,

$x_1 = \frac{2-10}{2} = -4$,

$x_2 = \frac{2+10}{2} = 6$.

III būdas

$(x-1)^2 = 5^2$,

$x-1=5$ arba $x-1=-5$,

$x_1 = 6$; $x_2 = -4$.

59. Raskite kvadratinės lygties didžiausią sprendinį.

a) $5(x+1) = x(x-1)$;

b) $x(x-15) = 3(108-5x)$;

c) $47 - x(3x+4) = 2(17-2x) - 62$;

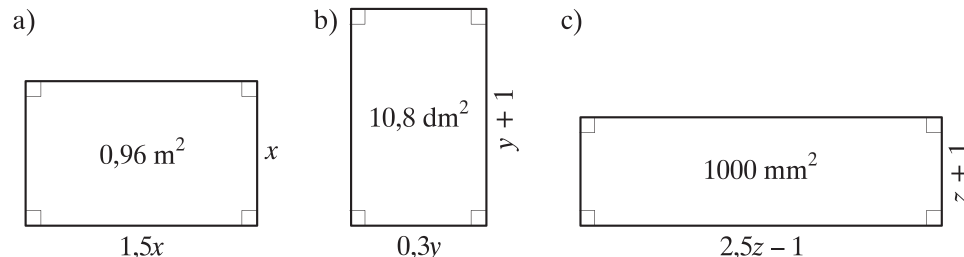
d) $(3x-8)^2 - (4x-6)^2 + (5x-2)(5x+2) = 96$;

e) $(2x-7)^2 + (3x-5)^2 - (4x-9)(4x+9) = 2(64-29x)$.

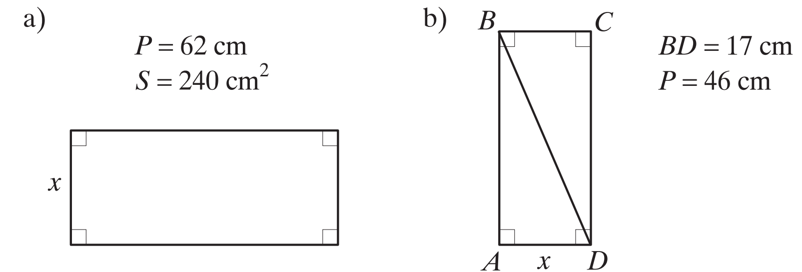
60. Stačiojo trikampio statinių ilgiai vienas nuo kito skiriasi 4,6 cm, o įžambinės ilgis lygus 7,4 cm. Apskaičiuokite statinių ilgius.

61. Stačiakampio plotas lygus 60 cm^2, o kraštinių ilgių skirtumas lygus 4 cm. Raskite to stačiakampio kraštinių ir įstrižainės ilgius.

62. Pagal brėžinio duomenis sudarę ir išsprendę lygtį, apskaičiuokite stačiakampio ilgį ir plotį.



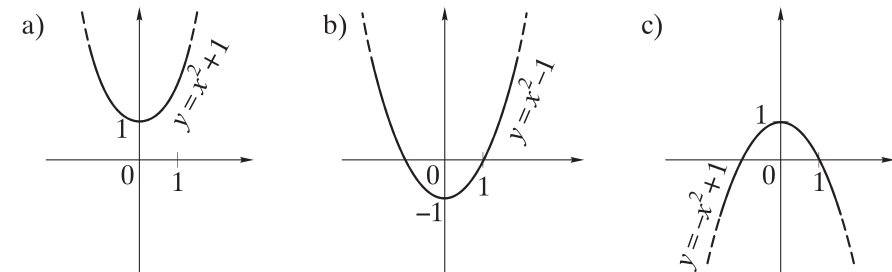
63. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite stačiakampio trumpesniosios kraštinės ilgį x (P — perimetras, S — plotas).



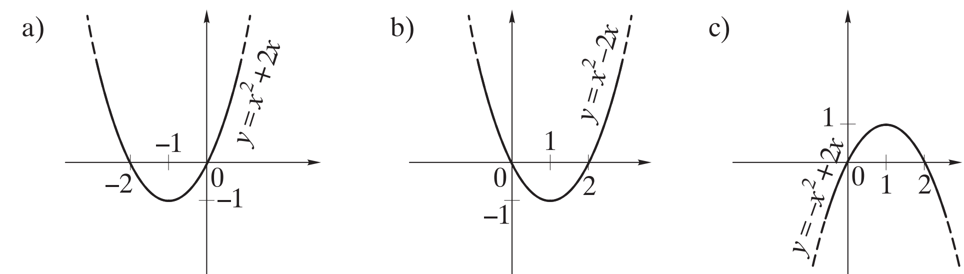
64. a) Dviejų skaičių skirtumas lygus 5, o jų kvadratų suma lygi 157. Raskite tuos skaičius.

b) Dviejų skaičių suma lygi 2, o jų kvadratų suma lygi 202. Raskite tuos skaičius.

65. 1) Paveikslėlyje pavaizduotas reiškinio ax^2+c (a, c — skaičiai) grafikas.



2) Paveikslėlyje pavaizduotas reiškinio ax^2+bx (a, b — skaičiai) grafikas.



Nustatykite, su kuriomis x reikšmėmis reiškinio reikšmės lygios 0; didesnės už 0; mažesnės už 0; lygios 1.

66. Nurodykite galimas a reikšmes, jei žinoma, kad lygtis $ax^2 - 5x + 3 = 0$: a) turi du skirtingus sprendinius; b) turi vienintelį sprendinį.



67. Stačiakampio sodo ilgis 5 kartus didesnis už plotį. Jei sodo plotį padidintume 9 m, tai jo plotas padidėtų 4 kartus. Kokie yra sodo matmenys?

Diskriminantas — iš kur jis atsirado?

Išveskime kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, sprendinių formules, kuriomis jau ne kartą rėmėmės.
Padalykime visus lygties $ax^2+bx+c=0$ narius iš a. Iš a dalyti galima, nes $a\neq 0$ (antraip lygtis nebūtų kvadratinė):

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Kvadratinė lygtis, kurioje koeficientas prie x^2 lygus 1, vadinama *redukúotąja kvadrãtine lygtimì*.

Iš trinario $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$ išskirkime dvinario kvadratą. Tenka gudrauti (narį $\frac{b}{a}x$ parašykime taip $2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x$ bei pasitelkime nuliui lygų skirtumą $\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$):

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\underbrace{x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{dvinario kvadratas}}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=$$

$$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Trinaris $m^2+2\cdot m\cdot n+n^2$ yra lygus dvinario $m+n$ kvadratui, t. y. $m^2+2mn+n^2=(m+n)^2$.

Gavome lygtį:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

Panagrinėkime trupmeną $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Trupmenos vardiklyje yra reiškinys $4a^2$. Kadangi $a\neq 0$, tai $4a^2$ visada teigiamas. Vadinasi, trupmenos ženklas priklauso tik nuo skaitiklio ženklo. Skaitiklyje yra reiškinys b^2-4ac. Šis reiškinys gali būti tiek teigiamas, tiek neigiamas, tiek lygus nuliui. Reiškinys b^2-4ac vadinamas kvadratinės lygties *diskriminantu* ir žymimas raide D.
Panagrinėkime lygtį: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}=0$.
Tos lygties sprendinių skaičius priklauso nuo diskriminanto ženklo.

- Kai $D<0$, tai $\frac{D}{4a^2}<0$ (paaiškinkite kodėl). Vadinasi, turime:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\text{Teigiamas skaičius}=0.$$

Ši lygtis sprendinių neturi (paaiškinkite kodėl).

- Kai $D=0$, tai kvadratinė lygtis turi vieną sprendinį:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{0}{4a^2}=0,\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0,\quad x+\frac{b}{2a}=0,\quad x=-\frac{b}{2a}.$$

- Kai $D>0$, tai $\frac{D}{4a^2}>0$ (paaiškinkite kodėl). Vadinasi, turime:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}=0,\quad \text{kur}\quad \frac{D}{4a^2}>0.$$

Ši lygtis turi du sprendinius. Kairiąją lygties pusę išskaidykime dauginamaisiais:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{D}{4a^2}}\right)^2=0,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2=0,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=0,$$

$$\left(x+\frac{b-\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{D}}{2a}\right)=0.$$

Iš čia:

arba $x+\frac{b-\sqrt{D}}{2a}=0$, arba $x+\frac{b+\sqrt{D}}{2a}=0$,

$x_1=-\frac{b-\sqrt{D}}{2a}$, $\quad x_2=-\frac{b+\sqrt{D}}{2a}$,

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

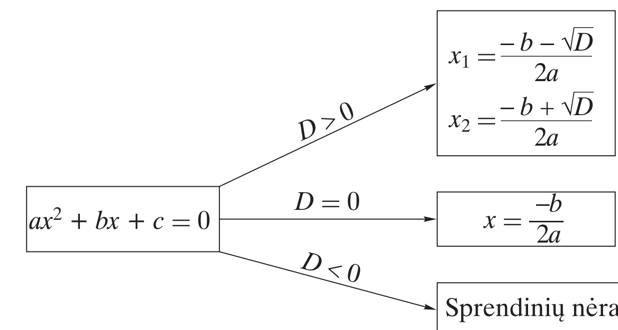
Taigi kvadratinės lygties $ax^2+bx+c=0$ sprendinius galima rasti pagal formules:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Jas galima užrašyti kaip vieną formulę:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Kvadratinės lygties sprendimą galima pateikti schema:



Kam lygi kvadratinės lygties sprendinių suma ir sprendinių sandauga?

Imkime kvadratinę lygtį

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

turinčią du sprendinius.
Tą lygtį galima redukuoti, t. y. parašyti lygtimi, kurios koeficientas prie x^2 būtų lygus 1.
Tam tereikia abi lygties puses padalyti iš a. Iš a dalyti galima, nes $a \neq 0$ (antraip lygtis nebūtų kvadratinė):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \big| : a, \quad (a \neq 0)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Bet kurią kvadratinę lygtį galima parašyti tokiu pavidalu!

Redukuotoje lygtyje koeficientą prie x pažymėkime raide p, o laisvąjį narį — raide q:

$$\frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q.$$

Kitaip sakant, bet kurią kvadratinę lygtį galima užrašyti taip:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Raskime redukuotosios kvadratinės lygties sprendinius ir pažiūrėkime, kam lygi jų ***suma*** ir kam lygi jų ***sandauga***.
Sprendžiame lygtį:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Mus domina tik tos lygtys, kurios turi du sprendinius!

1) Randame $D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot q = p^2 - 4q$.
2) Randame lygties sprendinius:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}.$$

3) Apskaičiuokime tų sprendinių sumą:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-p - \sqrt{D} - p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p.$$

Gavome, kad redukuotosios kvadratinės lygties, turinčios du sprendinius, sprendinių ***suma*** lygi koeficientui prie x, paimtam su priešingu ženklu!

4) Apskaičiuokime tų sprendinių sandaugą:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} =$$
$$= \frac{(-p - \sqrt{D}) \cdot (-p + \sqrt{D})}{4} = \frac{-(p + \sqrt{D}) \cdot (-p + \sqrt{D})}{4} =$$
$$= \frac{(p + \sqrt{D}) \cdot (p - \sqrt{D})}{4} = \frac{p^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4}.$$

Kadangi $D = p^2 - 4q$, tai gauname

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Gavome, kad redukuotosios kvadratinės lygties, turinčios du sprendinius, sprendinių ***sandauga*** lygi laisvajam nariui.

Taigi mes ką tik įrodėme vadinamąją ***Vijèto teorèmą***:

Jei redukuotoji kvadratinė lygtis $x^2 + px + q = 0$ turi du sprendinius x_1 ir x_2, tai

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Teisingas ir atvirkštinis teiginys:

Jei skaičių m ir n suma lygi $-p$, o jų sandauga lygi q, tai šie skaičiai yra lygties $x^2+px+q = 0$ sprendiniai, t. y. $x_1 = m$, $x_2 = n$.

Uždaviniai

1. Duota kvadratinė lygtis turi du sprendinius.
a) $x^2-11x+10 = 0$; b) $x^2-15x+50 = 0$; c) $x^2+17x+30 = 0$; d) $x^2-3x-40 = 0$.
Neспręsdami lygties pasakykite, kam lygi jos sprendinių suma, sprendinių sandauga, ir nustatykite sprendinius.

2. Naudodamiesi Vijeto teorema, apskaičiuokite lygties sprendinius.
a) $x^2 + x - 1 = 0$; b) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
c) $2x^2 - 10x + 8 = 0$; d) $-3x^2 + 3x + 36 = 0$;
e) $2x^2 - 8x + 8 = 0$; f) $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Pirmiausia, apskaičiavę D, nustatykite, ar lygtis turi sprendinių.

3. 1) Užrašykite kokią nors kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai būtų duotieji skaičiai.
a) $x_1 = 5$, $x_2 = -2$; b) $x_1 = -3$, $x_2 = -2$; c) $x_1 = 6$, $x_2 = 8$.
2) Užrašykite kvadratinę lygtį, kurios sprendiniai būtų tie patys duotieji skaičiai, o:
a) koeficientas prie x^2 būtų lygus 5;
b) koeficientas prie x būtų lygus -3;
c) laisvasis narys būtų lygus $\frac{1}{2}$.

Bikvadratinės lygtys

Lygtys, kurias galima užrašyti kaip

$ax^4 + bx^2 + c = 0$; x — nežinomasis, a, b, c — skaičiai, nelygūs 0,

vadinamos ***bikvadrãtinėmis***.

Bikvadratinėse lygtyse nežinomasis yra tik antrojo ir ketvirtojo laipsnio (x^2 ir x^4).

UŽDAVINYS. Išspręskime bikvadratinę lygtį

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Bikvadratinę lygtį galima pakeisti kvadratine. Nežinomąjį x^2 pažymėkime kokia nors raide, pavyzdžiui, raide t. Tada:

$$x^2 = t, \quad x^4 = (x^2)^2 = t^2.$$

Lygtyje $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ vietoj x^2 parašę t, o vietoj x^4 parašę t^2, turime lygtį, kurios nežinomasis yra t, o pati lygtis — kvadratinė:

$$t^2 - 10t + 9 = 0.$$

Išsprendžiame tą kvadratinę lygtį — randame t reikšmes:

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 9.$$

Grįžtame prie žymėjimo $x^2 = t$ — randame x reikšmes.
Kai $t = 1$, tai:

$x^2 = 1$,
$x^2 - 1 = 0$,
$(x - 1)(x + 1) = 0$,
$x = 1$ arba $x = -1$.

Kai $t = 9$, tai:

$x^2 = 9$,
$x^2 - 9 = 0$,
$(x - 3)(x + 3) = 0$,
$x = 3$ arba $x = -3$.

Vadinasi, lygtis $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ turi 4 sprendinius.

Atsakymas. $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$.

Uždaviniai

1. Duota bikvadratinė lygtis:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; b) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$; c) $x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4} = 0$;
d) $x^4 + x^2 - 20 = 0$; e) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; f) $x^4 + x^2 - \frac{3}{4} = 0$;
g) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$; h) $5x^4 + x^2 + \frac{1}{5} = 0$; i) $-x^4 + x^2 - 1 = 0$.

1) Kiek sprendinių turi bikvadratinė lygtis?

Bikvadratinė lygtis $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a, b, c \neq 0$) gali:
- turėti 4 skirtingus sprendinius;
- turėti 2 skirtingus sprendinius;
- neturėti sprendinių.

2) Apskaičiuokite bikvadratinės lygties sprendinius.
3) Pabaikite sakinį: *Jei bikvadratinė lygtis turi 4 sprendinius, tai ...*

Jei bikvadratinė lygtis $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a, b, c \neq 0$) turi 2 sprendinius, tai tie sprendiniai yra vienas kitam priešingi skaičiai.

2. Užrašykite kokią nors bikvadratinę lygtį, kuri:
a) neturi sprendinių; b) turi du sprendinius; c) turi keturis sprendinius.

3. Sudarykite bikvadratinę lygtį, kuri:
a) turi keturis sprendinius: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$;
b) turi du sprendinius: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

4. Įvedę naują nežinomąjį, išspręskite lygtį:
a) $(x^2 - 1)^2 + 2(x^2 - 1) + 1 = 0$; b) $(2x^2 + 2)^2 - 2(2x^2 + 2) - 8 = 0$.

Išspręskime lygtį $(x^2 + 2x + 2)^2 + 4(x^2 + 2x + 2) - 12 = 0$.
Jei šią lygtį bandytume spręsti reiškinį $x^2 + 2x + 2$ keldami kvadratu ir daugindami iš 4, t. y. atskliausdami, tai gautume:
$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2x^2 + 4x + 4 + 4x^2 + 8x + 8 - 12 = 0$,
$x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x = 0$.
Vieną gautosios lygties sprendinį nustatyti nesunku:
$x(x^3 + 4x^2 + 12x + 16) = 0$, $\underline{x = 0}$ arba $x^3 + 4x^2 + 12x + 16 = 0$.
O kaip spręsti toliau? Lygties $x^3 + 4x^2 + 12x + 16 = 0$ spręsti nemokame ir nesimokysime ...

Pasielkime gudriau — reiškinį $x^2 + 2x + 2$ pažymėkime kokia nors raide, pavyzdžiui, y: $x^2 + 2x + 2 = y$.
Tada gauname lygtį: $y^2 + 4y - 12 = 0$, kuri yra kvadratinė.
Randame jos sprendinius: $D = 64$, $y_1 = -6$, $y_2 = 2$.
Grįžtame prie pažymėjimo.
Kai $y = -6$, tai: $x^2 + 2x + 2 = -6$, $x^2 + 2x + 8 = 0$, $D = -28$, sprendinių nėra.
Kai $y = 2$, tai: $x^2 + 2x + 2 = 2$, $x^2 + 2x = 0$, $x(x + 2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

Atsakymas. $x = 0$, $x = -2$.

TESTAS

68. Kiek sprendinių turi kvadratinė lygtis:

a) $x^2 + x = 0$? **A** Nei vieno **B** Vieną **C** Du
b) $x^2 - 1 = 0$? **A** Nei vieno **B** Vieną **C** Du
c) $x^2 + 1 = 0$? **A** Nei vieno **B** Vieną **C** Du
d) $x^2 + x + 1 = 0$? **A** Nei vieno **B** Vieną **C** Du
e) $x^2 + x - 1 = 0$? **A** Nei vieno **B** Vieną **C** Du
f) $x^2 + 2x + 1 = 0$? **A** Nei vieno **B** Vieną **C** Du

69. Imkime kvadratinę lygtį

$ax^2 + bx = 0$ (čia $a \neq 0$).

Turime tris teiginius:
a) Kai $b = 0$, tai lygtis turi vieną sprendinį ($x = 0$).
b) Kai $b \neq 0$, tai lygtis turi du skirtingus sprendinius.
c) Vienas lygties sprendinys lygus 0.

Kurie iš teiginių yra teisingi?
A Tik a) **B** Tik b) **C** Tik c) **D** Tik a) ir b) **E** Tik a) ir c)
F Tik b) ir c) **G** Visi trys

70. Imkime kvadratinę lygtį

$ax^2 + c = 0$ (čia $a \neq 0$).

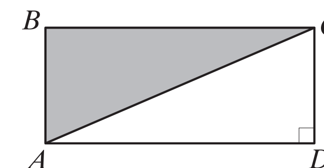
Ar teisingas teiginys?
a) Kai $c = 0$, tai lygtis turi vieną sprendinį ($x = 0$). **A** Taip **B** Ne
b) Kai $a > 0$ ir $c > 0$, tai lygtis sprendinių neturi. **A** Taip **B** Ne
c) Kai $a < 0$ ir $c < 0$, tai lygtis turi du sprendinius. **A** Taip **B** Ne
d) Kai $a > 0$, o $c < 0$, tai lygtis sprendinių neturi. **A** Taip **B** Ne
e) Kai $a < 0$, o $c > 0$, tai lygtis turi du sprendinius. **A** Taip **B** Ne

71. Nurodykite mažiausią lygties sprendinį.

a) $2x^2 = 0$; **A** -1 **B** 0 **C** 2 **D** Lygtis sprendinių neturi
b) $x^2 = 9$; **A** -9 **B** -3 **C** 0 **D** 3 **E** 9
c) $-2x^2 - 2 = 0$;
A -2 **B** -1 **C** 0 **D** 1 **E** 2 **F** Lygtis sprendinių neturi
d) $x^2 + 2x - 2 = 0$;
A -2 **B** -1 **C** $-2\sqrt{3}$ **D** $-1-\sqrt{3}$ **E** $-1+\sqrt{3}$
F Lygtis sprendinių neturi

$x \cdot 2x + (x+1)^2 = 100$ cm²

72. Nuo $24\,\text{cm}^2$ ploto stačiakampio $ABCD$, kurio viena kraštinė 5 cm trumpesnė už kitą, nukirptas statusis trikampis (paveikslėlyje jis nuspalvintas).

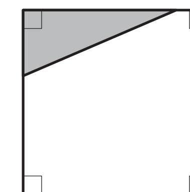


1) Nukirpto trikampio plotas lygus:
A $24\,\text{cm}^2$ **B** $12\,\text{cm}^2$ **C** $2\sqrt{6}\,\text{cm}^2$ **D** $2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

2) Šio stačiakampio perimetras lygus:
A 10 cm **B** 5 cm **C** 22 cm **D** 11 cm

3) Stačiakampio įstrižainės ilgis lygus:
A 11 cm **B** 73 cm **C** 8,5 cm **D** $\sqrt{73}$ cm

73. Nuo kvadrato nukirptas $24\,\text{cm}^2$ ploto statusis trikampis, kurio vienas statinis 2 cm ilgesnis už kitą statinį.



1) Kam lygūs nukirpto trikampio statinių ilgiai?
A 6 cm, 4 cm **B** 8 cm, 4 cm **C** 12 cm, 12 cm **D** 6 cm, 8 cm

2) Trikampio įžambinė yra 6 cm trumpesnė už kvadrato įstrižainę. Koks kvadrato įstrižainės ilgis?
A 10 cm **B** 16 cm **C** 12 cm **D** 14 cm

3) Koks kvadrato kraštinės ilgis?
A 128 cm **B** 11,3 cm **C** $8\sqrt{2}$ cm **D** 256 cm

4) Koks likusios kvadrato dalies plotas?
A $104\,\text{cm}^2$ **B** $128\,\text{cm}^2$ **C** $48\,\text{cm}^2$ **D** $69{,}3\,\text{cm}^2$

74. Jei lygties $ax^2 + 2x + 2 = 0$ koeficientas $a = 0$, tai ta lygtis:
A turi du sprendinius **B** turi vieną sprendinį
C sprendinių neturi **D** turi be galo daug sprendinių

PASITIKRINAME

75. Išspręskite kvadratines lygtis $ax^2+bx=0$.

a) $x^2+2x=0$, $x^2-2x=0$, $-x^2+2x=0$, $-x^2-2x=0$;

b) $3x^2+5x=0$, $3x^2-5x=0$, $-3x^2+5x=0$, $-3x^2-5x=0$;

c) $\frac{1}{2}x^2+1{,}5x=0$, $\frac{3}{2}x^2-0{,}5x=0$, $-2\frac{1}{2}x^2+1{,}5x=0$.

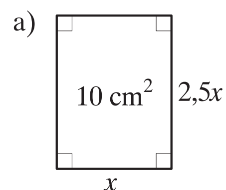
76. Išspręskite kvadratines lygtis $ax^2+c=0$.

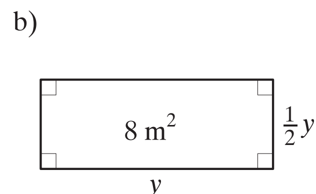
a) $x^2-4=0$, $x^2+4=0$;
b) $x^2-9=0$, $x^2+9=0$;
c) $x^2-0{,}25=0$, $x^2+0{,}25=0$;
d) $x^2-\frac{1}{9}=0$, $x^2+\frac{1}{9}=0$;
e) $-x^2+100=0$, $-x^2-100=0$;
f) $x^2=0$, $2x^2=0$, $-x^2=0$;
g) $x^2-5=0$, $x^2+5=0$, $-x^2+5=0$, $-x^2-5=0$;
h) $2x^2-20=0$, $-2x^2+19=0$, $-2x^2+21=0$, $-2x^2-22=0$.

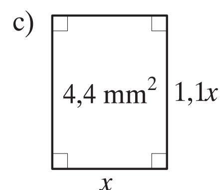
77. Išspręskite kvadratinę lygtį $ax^2+bx+c=0$.

a) $x^2-7x+12=0$; b) $x^2-6x+5=0$; c) $x^2+8x+7=0$;
d) $2x^2-3x+4=0$; e) $2x^2+12x+18=0$; f) $2x^2+3x+40=0$;
g) $x^2-4x+1=0$; h) $4x^2-4x+1=0$; i) $9x^2+24x+16=0$;
j) $2x^2-5x-3=0$; k) $3x^2-8x+5=0$; l) $36x^2-12x+1=0$.

78. Kam lygus pavaizduoto stačiakampio perimetras? (Stačiakampio viduje nurodytas jo plotas.)

a)


b)


c)


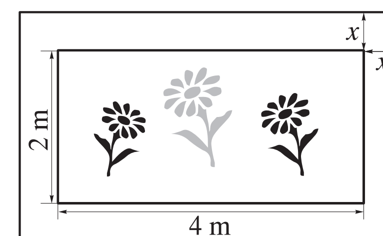
79. Stačiakampio formos sklypo plotas yra 800 m^2. Sklypas aptvertas 120 m ilgio tvora. Apskaičiuokite sklypo ilgį ir plotį.

80. Stačiojo trikampio vienas statinis 3 cm ilgesnis už kitą, o jo įžambinės ilgis yra 15 cm. Raskite šio trikampio statinių ilgius ir apskaičiuokite jo plotą.

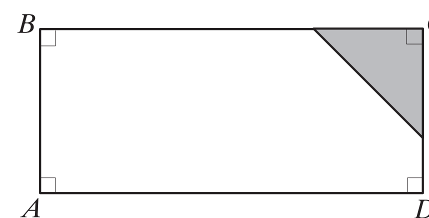
81. Stačiojo trikampio perimetras lygus 48 cm, o įžambinės ilgis yra 20 cm. Apskaičiuokite trikampio plotą.

82. a) Raskite skaičių, kurio kvadratas 12 vienetų didesnis už patį skaičių.
b) Vienas skaičius 10 vienetų didesnis už kitą, o jų sandauga lygi 144. Raskite tuos skaičius.
c) Dviejų vienas po kito einančių natūraliųjų skaičių kvadratų suma lygi 13. Raskite tuos skaičius.

83. Aplink stačiakampį gėlyną, kurio kraštai yra 2 m ir 4 m ilgio, yra vienodo pločio takelis. Apskaičiuokite takelio plotį, jei jo plotas yra 9 kartus didesnis už gėlyno plotą.



84. Stačiakampio $ABCD$ plotis 4 cm mažesnis už ilgį. Nukirptas to stačiakampio kampas. Nukirptojo trikampio statiniai 2 cm trumpesni už stačiakampio plotį. Likusios stačiakampio dalies plotas lygus 78 cm^2.

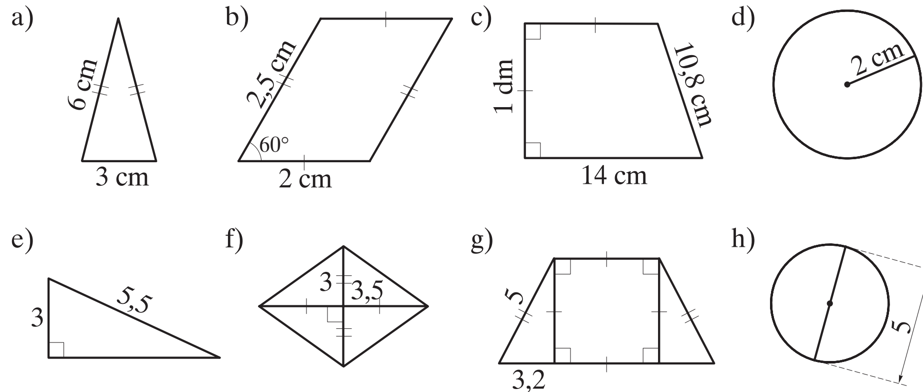


1) Kam lygūs stačiakampio kraštinių ilgiai?
2) Koks nukirptojo trikampio plotas?
3) Koks nukirptojo trikampio perimetras?

85. Užrašykite kokią nors kvadratinę lygtį, kuri:
a) turi du skirtingus sprendinius;
b) turi vienintelį sprendinį;
c) neturi sprendinių;
d) turi du vienas kitam priešingus sprendinius;
e) turi du sprendinius, kurių vienas lygus 0.

KARTOJAME

86. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite pavaizduotos figūros perimetrą ir plotą.



Figūros perimetras — figūros krašto ilgis.

a, b, c $\quad P = a + b + c$ $\qquad$ r $\quad C = 2\pi r$

Trikampio plotas

h, a $\quad S = \frac{a \cdot h}{2}$ $\qquad$ a, b $\quad S = \frac{a \cdot b}{2}$

Lygiagretainio plotas

h, a $\quad S = a \cdot h$ $\qquad$ a, b $\quad S = a \cdot b$

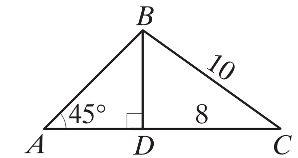
Trapecijos plotas

b, h, a $\quad S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$ $\qquad$ b, c, a $\quad S = \frac{(a+b) \cdot c}{2}$

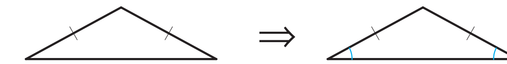
Skritulio plotas

r $\quad S = \pi r^2$

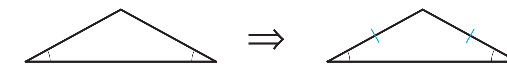
87. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite:
a) BD; b) AD; c) AB;
d) $S_{\triangle ADB}$; e) $S_{\triangle DBC}$; f) $S_{\triangle ABC}$.



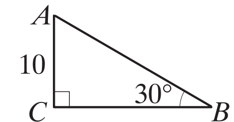
Trikampis, kurio dvi kraštinės yra lygios, vadinamas lygiašoniu trikampiu. Lygiašonio trikampio kampai, esantys prie pagrindo, yra lygūs.



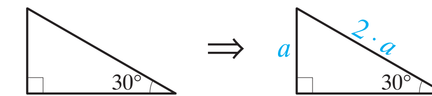
Jei trikampio du kampai yra lygūs, tai tas trikampis yra lygiašonis.



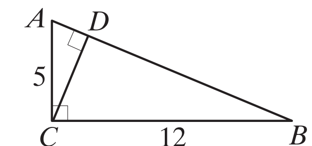
88. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite trikampio perimetrą, plotą ir aukštinės, nubrėžtos į įžambinę, ilgį.



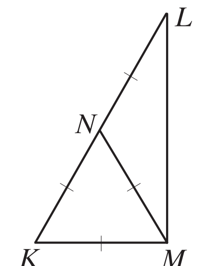
Jei stačiojo trikampio kampas lygus 30°, tai statinis, esantis prieš 30° kampą, yra dvigubai trumpesnis už įžambinę.



89. Stačiojo trikampio ABC statiniai lygūs 5 cm ir 12 cm. CD — aukštinė, nubrėžta į įžambinę. Apskaičiuokite aukštinės CD ilgį.



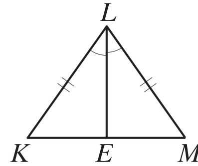
90. *Duota*: MN — trikampio KLM pusiaukraštinė, $\triangle KNM$ — lygiakraštis, $KL = 20$ cm.
Apskaičiuokite:
a) $\angle K$; b) $\angle LNM$; c) MN.



PRISIMENAME TAI, KO PRIREIKS KITAME SKYRIUJE

91. Lygiašonio trikampio KLM ($KL = LM = 3$ cm) pusiaukampinė EL lygi 2 cm.

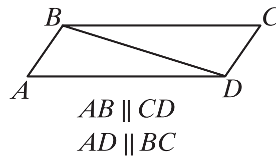
1) Ar $\triangle KLE = \triangle MLE$? Atsakymą pagrįskite.
2) Ar $\angle K = \angle M$? Atsakymą pagrįskite.



Jei vieno trikampio dvi kraštinės ir kampas tarp jų yra lygūs kito trikampio dviem kraštinėms ir kampui tarp jų, tai tie trikampiai yra lygūs.

3) Apskaičiuokite EM ilgį.
4) Kokio ilgio yra $\triangle KLM$ aukštinė, nubrėžta iš viršūnės L?
5) Apskaičiuokite $\triangle KLM$ plotą.
6) Įsitikinkite, kad $\triangle KLM$ aukštinė, nubrėžta iš viršūnės K, lygi $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ cm.

92. a) Paveikslėlyje pavaizduotas lygiagretainis $ABCD$.

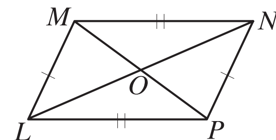


1) Paaiškinkite, kodėl lygiagretainio įstrižainė dalija lygiagretainį į du lygius trikampius.

Jei vieno trikampio kraštinės yra lygios kito trikampio kraštinėms, tai tie trikampiai yra lygūs.

2) Surašykite tų trikampių atitinkamas kraštines ir atitinkamus kampus.

b) Paveikslėlyje pavaizduotas lygiagretainis $LMNP$.



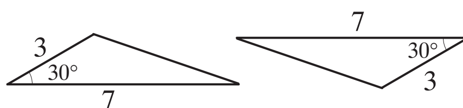
1) Kiek trikampių galima pamatyti šiame paveikslėlyje? Kurie iš jų yra lygūs?

Jei vieno trikampio kraštinė yra lygi kito trikampio kraštinei ir atitinkami kampai prie tų kraštinių yra lygūs, tai tie trikampiai yra lygūs.

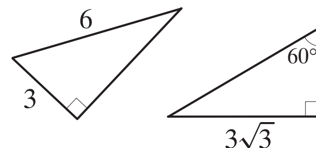
2) Įsitikinkite, kad $S_{\triangle LMO} = S_{\triangle OMN}$.

93. Ar paveikslėlyje pavaizduoti trikampiai yra lygūs? Atsakymą pagrįskite.

a)



b)



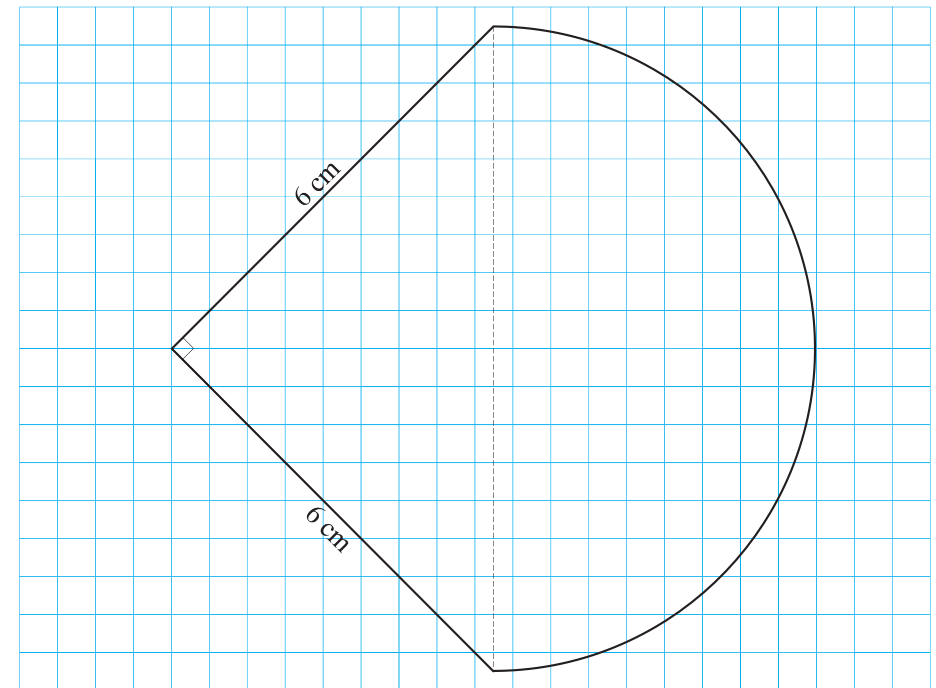
94. a) Valdas eina 5 km/h greičiu. Per kiek laiko jis nueis kelią, kuris žemėlapyje pavaizduotas 36 cm ilgio atkarpa? Žemėlapio mastelis yra 1 : 40 000.

b) Ūkininkas nori apsėti stačiakampį lauką miežiais. Plane, kurio mastelis 1 : 20 000, to lauko matmenys yra 9 cm × 7 cm. Kiek tonų miežių reikės ūkininkui, jei 1 ha apsėti reikia 0,3 t miežių?

c) Plane, kurio mastelis 1 : 400, pavaizduotas apskritas lauko baseinas. Jo plotas plane lygus 18,84 cm^2. Kokį plotą baseinas užima tikrovėje?

Jei plano mastelis yra 1 : 500, tai reiškia, kad:
1 cm plane atitinka 500 cm tikrovėje

d) Pavaizduota figūra sudaryta iš trikampio ir pusskritulio (žr. pav.).



1) Apskaičiuokite figūros krašto ilgį ir plotą.
2) Nubraižykite šią figūrą masteliu 1 : 2 (dvigubai mažesnę jos kopiją). Apskaičiuokite tos sumažintos kopijos krašto ilgį ir plotą.
3) Apskaičiuokite figūros, dvigubai didesnės už pradinę, ilgį ir plotą.

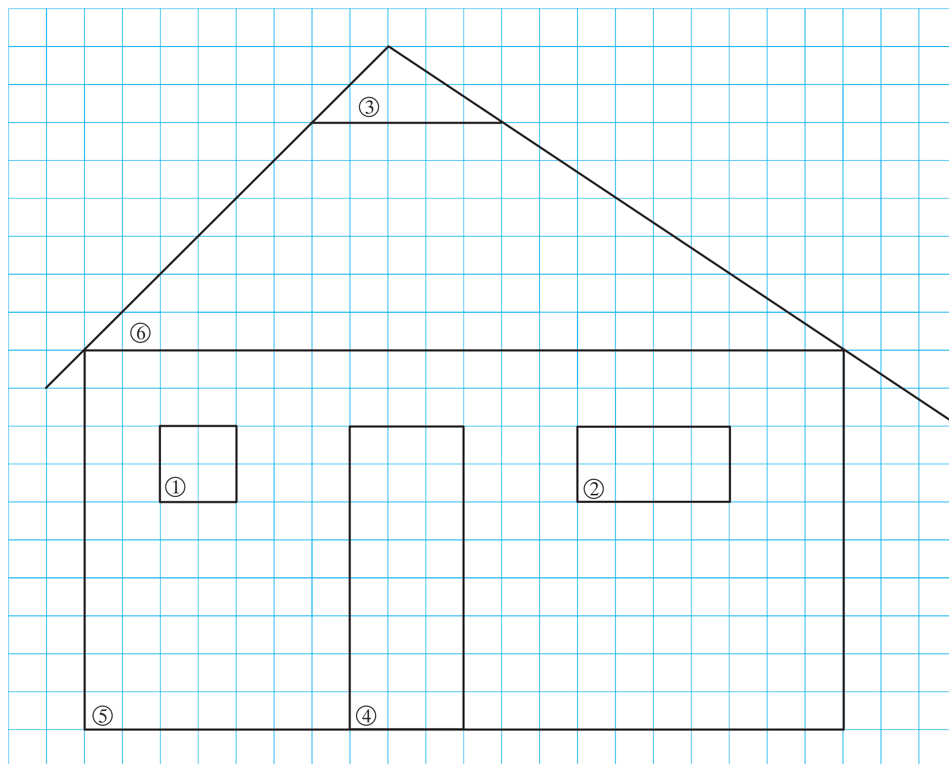
e) Apskaičiuokite nežinomą proporcijos narį.

1) $\frac{x}{2} = \frac{6}{3}$; 2) $\frac{8}{x} = \frac{4}{5}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{6}$; 4) $\frac{1{,}2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{x}$.

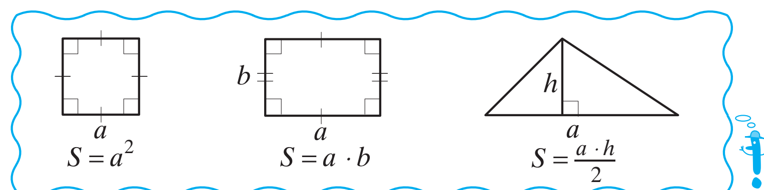
Jei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, tai: $a \cdot d = b \cdot c$; $a = \frac{b \cdot c}{d}$, $b = \frac{a \cdot d}{c}$, $c = \frac{a \cdot d}{b}$, $d = \frac{b \cdot c}{a}$.

Mastelis ir panašios figūros

Brėžinyje pavaizduota namelio priekinė dalis.



1) Naudodamiesi liniuote, apskaičiuokite kiekvieno brėžinyje pavaizduoto lango plotą (S_1, S_2, S_3) ir durų plotą (S_4) kvadratiniais centimetrais.



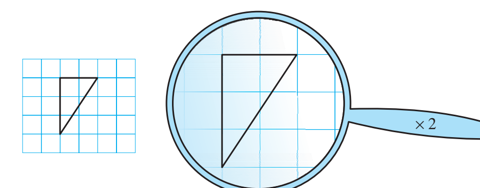
2) Apskaičiuokite namelio pirmojo aukšto (stačiakampės dalies) priekinės sienos (be durų ir langų) plotą (S_5) kvadratiniais centimetrais.
3) Apskaičiuokite palėpės (trikampės dalies) priekinės sienos (įskaitant ir langą) plotą (S_6) kvadratiniais centimetrais. Raskite santykį $\frac{S_6}{S_3}$.

O dabar pabandykite apskaičiuoti realius tuos pačius dydžius, jei žinoma, kad namelis pavaizduotas masteliu 1 : 50, t. y. brėžinyje jis sumažintas 50 kartų.

TRIKAMPIŲ PANAŠUMO POŽYMIAI

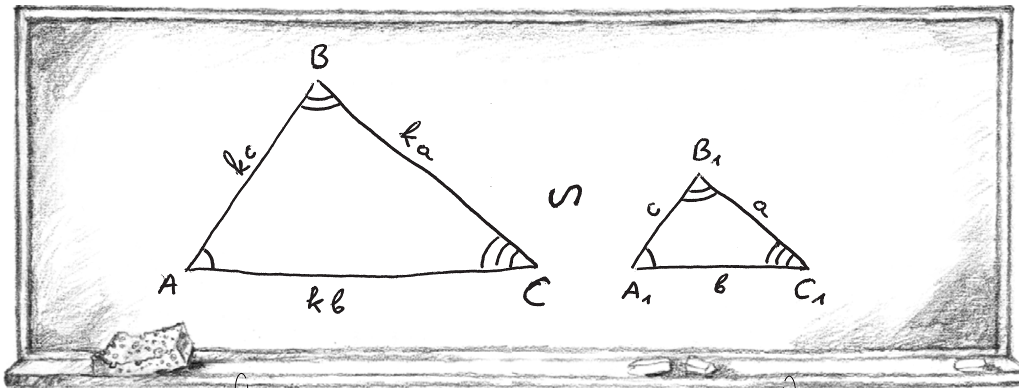
PANAŠIŲJŲ TRIKAMPIŲ SAVYBĖS

Šiame skyriuje nagrinėsime panašiuosius trikampius, t. y. tokius trikampius, kurie yra vienas kito padidinta ar sumažinta kopija.



- Sužinosime, kokie trikampiai vadinami panašiaisiais.
- Sužinosime, kokių duomenų pakanka nustatant, ar trikampiai yra panašūs.
- Susipažinsime su panašiųjų trikampių savybėmis.

6.1. KOKIE TRIKAMPIAI VADINAMI PANAŠIAISIAIS



Du trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ vadinami ***panašiaĩsiais***, jeigu:

- vieno trikampio kampai yra lygūs kito trikampio kampams:

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1;$$

- vieno trikampio kraštinės yra vienodai kartų didesnės (ar mažesnės) už kito trikampio atitinkamas kraštines:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = k, \quad \frac{BC}{B_1C_1} = k, \quad \frac{CA}{C_1A_1} = k.$$

Rašome: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

Skaitome: Trikampis ABC panašus į trikampį $A_1B_1C_1$
(*arba*: Trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra panašūs)

Skaičius k vadinamas trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ ***panašùmo koeficientù***.

Suprantame: Panašiųjų trikampių atitinkami kampai yra lygūs, o atitinkamos kraštinės — proporcingos.

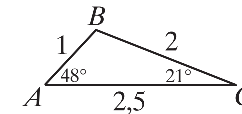
Užduotis. Pažiūrėję į lentoje nubraižytus trikampius ir perskaitę su jais susijusius apibrėžimus, atsakykite į klausimus.

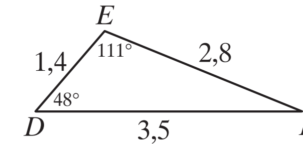
1) Kokie trikampiai vadinami panašiaisiais? Kaip vadinamas skaičius, kuris lygus panašiųjų trikampių atitinkamų kraštinių ilgių santykiams?
2) Matuodami ir skaičiuodami nustatykite lentoje pavaizduotų panašiųjų trikampių ABC ir $A_1B_1C_1$ panašumo koeficiento k reikšmę.

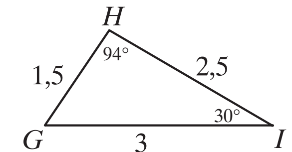
Jei panašiųjų $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1B_1C_1$ panašumo koeficientas lygus k, t. y.
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$, tai $\triangle A_1B_1C_1$ ir $\triangle ABC$ panašumo koeficientas lygus $\frac{1}{k}$, t. y. $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{1}{k}$.

95. Kurie iš pavaizduotų trikampių ABC, DEF ir GHI yra panašūs? Paaiškinkite kodėl. Surašykite panašiųjų trikampių atitinkamas kraštines ir atitinkamus kampus bei nustatykite jų panašumo koeficientą.

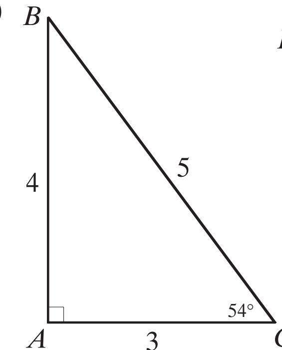
a)

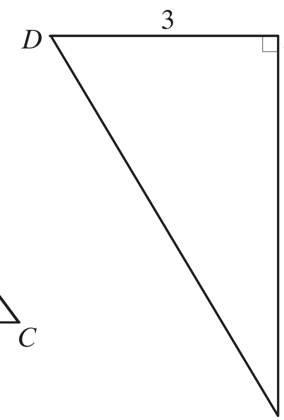


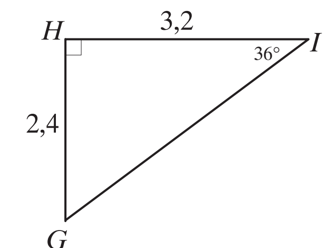




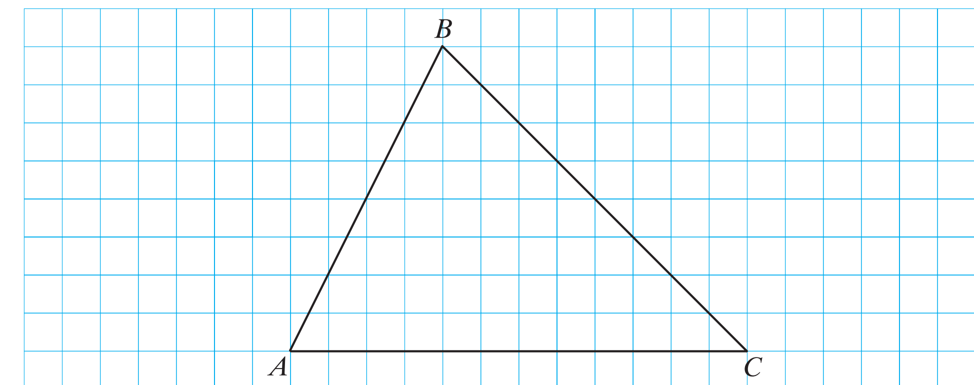
b)







96. Nubraižykite $\triangle A_1B_1C_1$, kuris būtų panašus į $\triangle ABC$, o $\triangle A_1B_1C_1$ ir $\triangle ABC$ panašumo koeficientas būtų: a) $k = 2$; b) $k = \frac{1}{2}$. Gal tai galite padaryti nesinaudodami nei liniuote, nei matlankiu, o tik skaičiuodami langelius?



97. Įvairiakraščiai trikampiai ABC ir DEF yra panašūs. Nustatykite, kas turėtų būti parašyta vietoj klaustukų.

a) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = ?$,
$AB = 2$, $BC = 3$, $DE = 4$, $DF = 8$, $AC = ?$, $EF = ?$;

b) $\angle A = 30°$, $\angle D = 80°$, $\angle C = \angle E$, $\angle B = ?$, $\angle F = ?$, $\frac{AB}{?} = \frac{BC}{?}$.

6.2. TRIKAMPIŲ PANAŠUMO POŽYMIS PAGAL DU KAMPUS

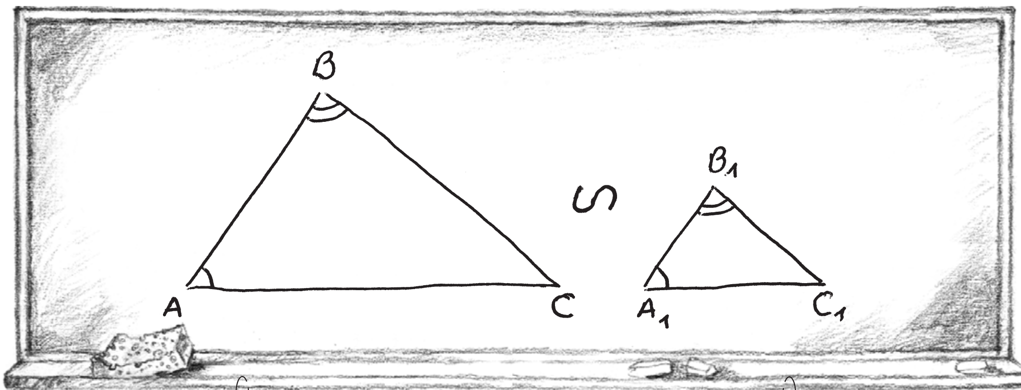
1 užduotis. Lentoje nubraižyti du trikampiai: $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1B_1C_1$. Tie trikampiai turi po du atitinkamai lygius kampus:

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1.$$

Įsitikinkite, kad tie trikampiai yra *panašūs*.

1) Kuo remiantis galima tvirtinti, kad ir tretieji trikampių kampai yra lygūs, t. y. $\angle C = \angle C_1$?
2) Matuodami ir skaičiuodami įsitikinkite, kad $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1B_1C_1$ kraštinės yra proporcingos, t. y. jų ilgių santykiai yra vienodi:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}.$$

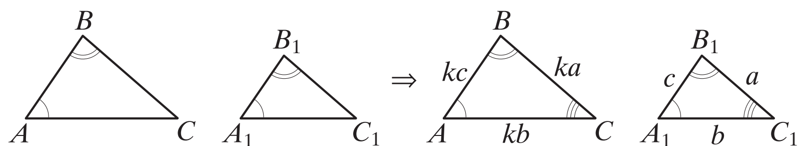


Jeigu vieno trikampio du kampai yra lygūs kito trikampio dviem kampams, tai tie trikampiai yra panašūs.

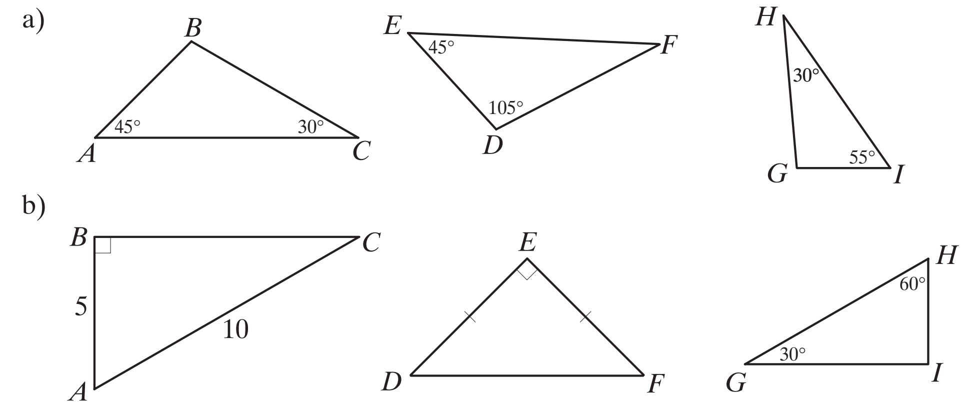
2 užduotis.

1) Perskaitykite lentos apačioje suformuluotą trikampių panašumo požymį ir pabandykite jį nusakyti savais žodžiais.
2) Nustatykite, kas turėtų būti parašyta vietoj daugtaškių.

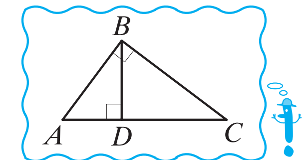
Jei $\angle A = \angle A_1$ ir $\angle B = \angle B_1$, ***tai*** $\angle C = \ldots$ ir $\frac{AB}{A_1B_1} = \ldots$



98. Kurie iš pavaizduotų trikampių ABC, DEF ir GHI yra panašūs? Surašykite panašiųjų trikampių atitinkamas kraštines.



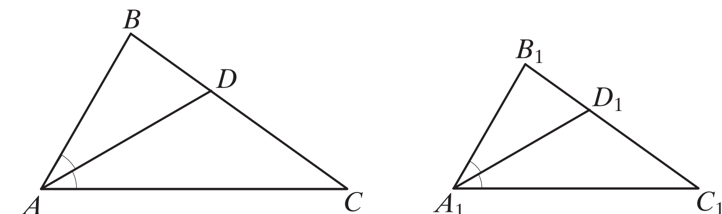
99. 1) Nubraižykite statųjį trikampį ABC ($\angle B = 90°$), kurio $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm.
2) Nubrėžkite to trikampio aukštinę BD, einančią į įžambinę AC.
3) Užrašykite trikampius, į kuriuos trikampį ABC padalijo jo aukštinė BD.
4) Įsitikinkite, kad:



$$\triangle ABC \backsim \triangle ADB; \quad \triangle ABC \backsim \triangle BDC; \quad \triangle ADB \backsim \triangle BDC.$$

5) Apskaičiuokite tų trikampių panašumo koeficientus.
6) Apskaičiuokite tų trijų trikampių perimetrus ir plotus.

100. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. Iš kampų A ir A_1 nubrėžtos tų trikampių pusiaukampinės AD ir A_1D_1.



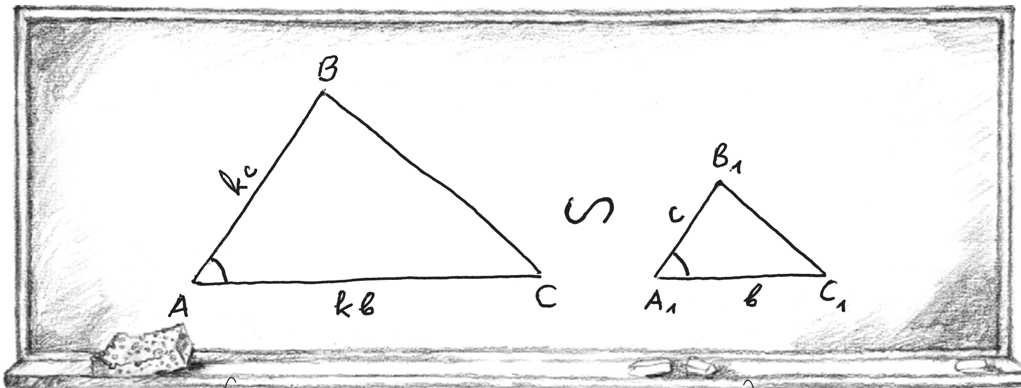
1) Įsitikinkite, kad $\triangle ADC \backsim \triangle A_1D_1C_1$.
2) Apskaičiuokite A_1D_1 ilgį, jei $AC = 15$ cm, $A_1C_1 = 10$ cm, $AD = 9$ cm.

6.3. TRIKAMPIŲ PANAŠUMO POŽYMIS PAGAL DVI KRAŠTINES IR KAMPĄ TARP JŲ

1 užduotis. Lentoje nubraižyti du trikampiai: $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1B_1C_1$. Tie trikampiai turi po dvi atitinkamai proporcingas kraštines bei po lygų kampą, esantį tarp tų kraštinių:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}\ (= k), \quad \angle A = \angle A_1.$$

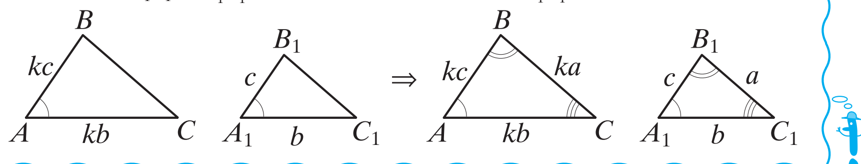
Įsitikinkite, kad tie trikampiai yra *panašūs*.
1) Matuodami ir skaičiuodami nustatykite k reikšmę.
2) Išmatavę trečiųjų kraštinių BC ir B_1C_1 ilgius bei apskaičiavę tų ilgių santykį, įsitikinkite, kad $\frac{BC}{B_1C_1} = k$.
3) Matuodami įsitikinkite, kad likusios dvi trikampių kampų poros yra lygios: $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.



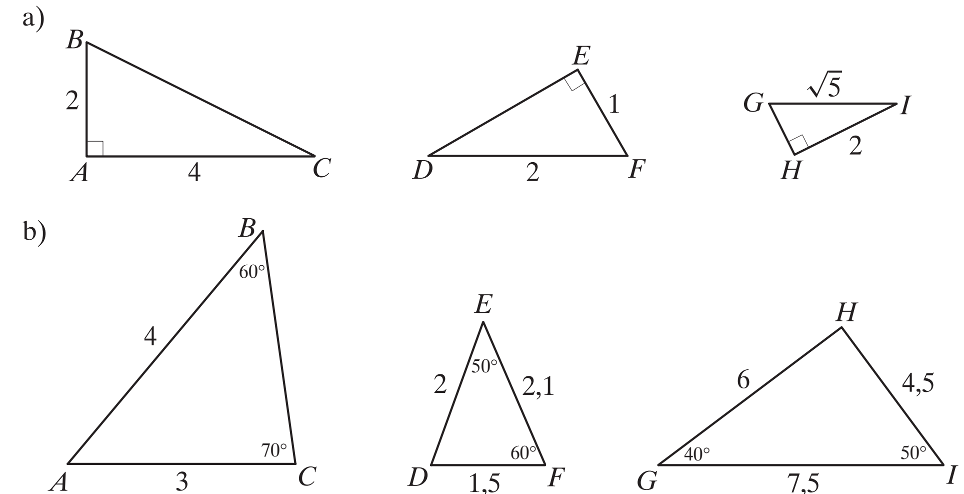
Jeigu vieno trikampio dvi kraštinės yra proporcingos kito trikampio dviem kraštinėms ir kampai tarp tų kraštinių yra lygūs, tai tie trikampiai yra panašūs.

2 užduotis.
1) Perskaitykite lentos apačioje suformuluotą trikampių panašumo požymį ir pabandykite jį nusakyti savais žodžiais.
2) Nustatykite, kas turėtų būti parašyta vietoj daugtaškių.

Jei $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}\ (=k)$ ir $\angle A = \angle A_1$, ***tai*** $\frac{BC}{B_1C_1} = \ldots$, $\angle B = \ldots$



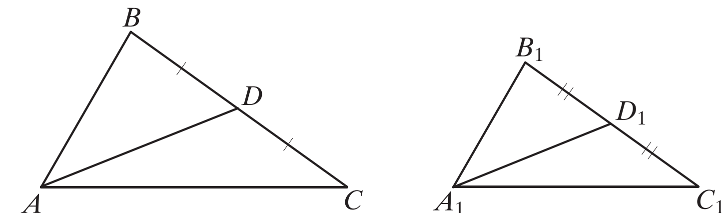
101. Kurie iš pavaizduotų trikampių ABC, DEF ir GHI yra panašūs? Surašykite panašiųjų trikampių atitinkamus kampus. Apskaičiuokite panašiųjų trikampių panašumo koeficientą.



102. 1) Nubraižykite $\triangle ABC$, kurio $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm, $\angle A = 45°$.
2) Nubraižykite $\triangle DEF$, panašų į $\triangle ABC$, kai tų trikampių panašumo koeficientas: a) $k = 2$; b) $k = \frac{1}{2}$.
3) Užrašykite atitinkamas trikampių ABC ir DEF kraštines bei atitinkamus kampus.
4) Kuris $\triangle DEF$ kampas lygus $45°$?
5) Kam lygios $\triangle DEF$ kraštinės, sudarančios $45°$ kampą?

103. Trikampis ABC yra panašus į trikampį DEF. Kas turėtų būti parašyta vietoj klaustukų?
$\frac{AB}{FD} = \frac{AC}{FE} = 10$, $BC = 5$ dm, $FE = 2$ cm, $\angle F = 90°$;
$DE = ?$ cm, $AB = ?$ dm.

104. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ ($k = 1{,}5$). Iš kampų A ir A_1 nubrėžtos tų trikampių pusiaukraštinės AD ir A_1D_1.



1) Įsitikinkite, kad $\triangle ADC \backsim \triangle A_1D_1C_1$ ir raskite jų panašumo koeficientą.
2) Apskaičiuokite AD ilgį, jei $DC = 2$ cm, $A_1D_1 = 1{,}5 \cdot D_1C_1$.

6.4. TRIKAMPIŲ PANAŠUMO POŽYMIS PAGAL TRIS KRAŠTINES

1 užduotis. Lentoje nubraižyti du trikampiai: $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1B_1C_1$. Vieno trikampio visos trys kraštinės yra proporcingos atitinkamoms kito trikampio kraštinėms:

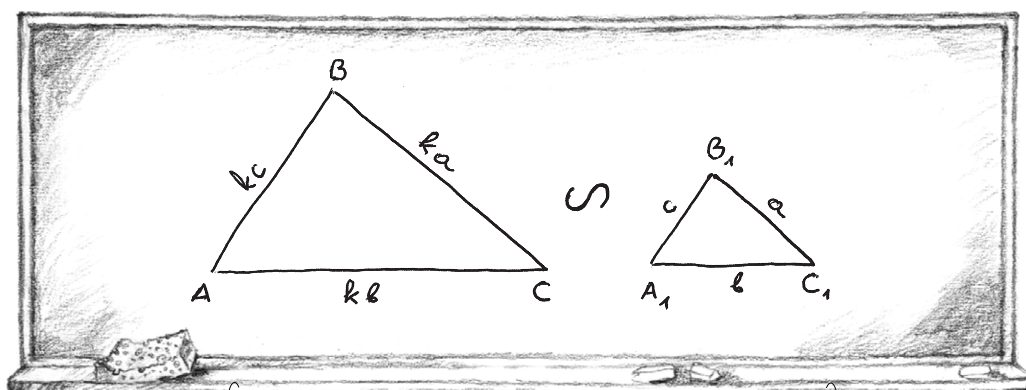
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}\ (= k).$$

Įsitikinkite, kad tie trikampiai yra panašūs.

1) Matuodami įsitikinkite, kad:

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1.$$

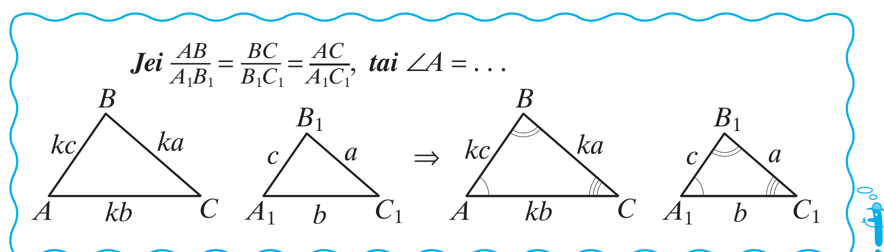
2) Nematuodami paaiškinkite, kodėl ir $\angle C = \angle C_1$.



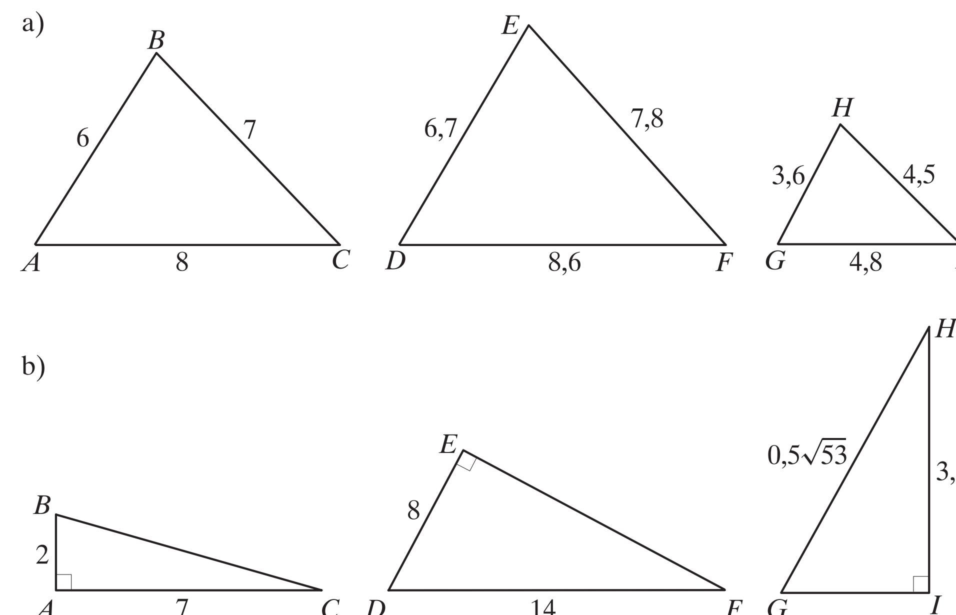
Jeigu vieno trikampio visos trys kraštinės yra proporcingos kito trikampio atitinkamoms kraštinėms, tai tie trikampiai yra panašūs.

2 užduotis.

1) Perskaitykite lentos apačioje suformuluotą trikampių panašumo požymį ir pabandykite jį nusakyti savais žodžiais.
2) Nustatykite, kas turėtų būti parašyta vietoj daugtaškio.

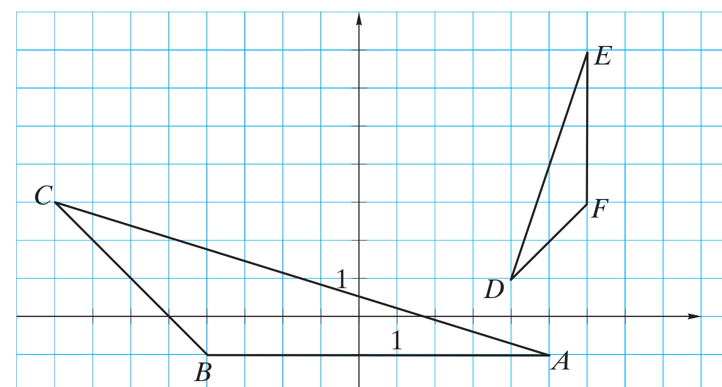


105. Kurie iš pavaizduotų trikampių ABC, DEF ir GHI yra panašūs? Apskaičiuokite jų panašumo koeficientą.



106. 1) Nubraižykite $\triangle ABC$, kurio $AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 10$ cm.
2) Naudodamiesi liniuote ir skriestuvu, bet nesinaudodami matlankiu, nubraižykite trikampį KLM, panašų į trikampį ABC, kai jų panašumo koeficientas: a) $k = 2$; b) $k = \frac{1}{2}$.
3) Užrašykite, kam lygios $\triangle KLM$ kraštinės.

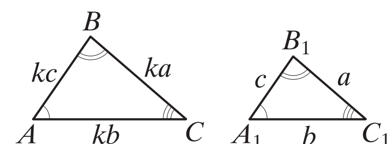
107. Koordinačių plokštumoje nubraižyti du trikampiai.



Įsitikinkite, kad $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

APIBENDRINAME

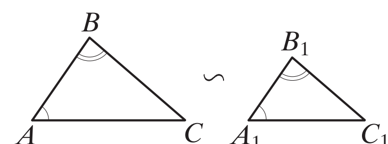
Trikampiai vadinami ***panašiaĩsiais***, jei jų atitinkami kampai yra lygūs ir atitinkamos kraštinės yra proporcingos.
Panašumui žymėti vartojamas ženklas $\backsim$.
Panašiųjų trikampių atitinkamų kraštinių ilgių santykis vadinamas tų trikampių *panašùmo koeficientù*. Panašumo koeficientas žymimas raide k.



$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$,
nes:
$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$;
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$;
k — panašumo koeficientas.

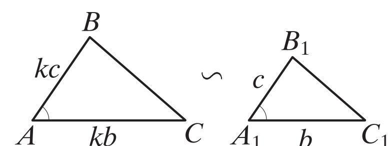
Trikampių panašumo požymiai

1. *Pagal du kampus*
Jei vieno trikampio du kampai atitinkamai lygūs kito trikampio dviem kampams, tai tie trikampiai yra panašūs.



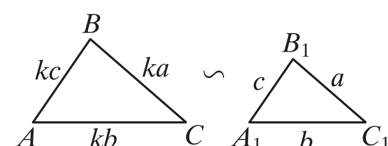
Jei $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,
tai $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

2. *Pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų*
Jei vieno trikampio dvi kraštinės yra proporcingos kito trikampio dviem kraštinėms ir kampai tarp tų kraštinių yra lygūs, tai tie trikampiai yra panašūs.



Jei $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} (= k)$ ir $\angle A = \angle A_1$,
tai $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

3. *Pagal tris kraštines*
Jeigu vieno trikampio visos trys kraštinės yra proporcingos kito trikampio kraštinėms, tai tie trikampiai yra panašūs.



Jei $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} (= k)$,
tai $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Matematikai figūrų panašumui žymėti vartoja simbolį $\backsim$. To ženklo kilmė siejama su paversta raide s (pirmoji angliško žodžio *similar* (panašus) raidė).

Požymiai, požymiai, požymiai

1) Kai sakome, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra panašūs, tai suprantame, kad tuos trikampius sieja 6 lygybės: trys kampų lygybės ir trys kraštinių ilgių santykių lygybės.

Kitaip sakant, kalbama apie panašiųjų trikampių *apibrėžimą*.

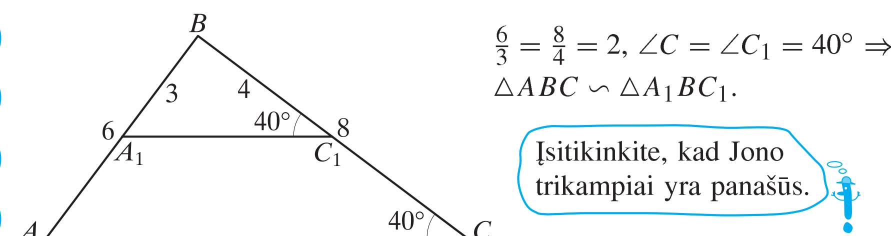
$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

2) Kai sakome, kad trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra panašūs, nes jie turi po lygų kampą, kurį sudarančios kraštinių poros yra proporcingos, tai suprantame, kad tuos trikampius sieja ne tik tos trys lygybės, bet ir kitos trys: likusių dviejų kampų porų kampai yra atitinkamai lygūs ir likusios kraštinių porõs ilgių santykis yra toks pat kaip ir anų dviejų porų.

Kitaip sakant, kalbama apie trikampių *panašumo požymį*.

Jei (trikampiai ABC su kraštinėmis kc, kb ir $A_1B_1C_1$ su kraštinėmis c, b) **tai** $\Rightarrow$ $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,
$\frac{BC}{B_1C_1} = k$.

3) Iš viso mes žinome tris trikampių panašumo požymius. O gal jų yra daugiau? Jonas sugalvojo tokį trikampių panašumo požymį:
„Jei vieno trikampio (ABC) dvi kraštinės (AB ir BC) yra proporcingos kito trikampio ($A_1B_1C_1$) dviem kraštinėms (A_1B_1 ir B_1C_1), o $\angle C = \angle C_1$, tai tie trikampiai yra panašūs“.
Kaip įrodymą jis pateikė tokį brėžinį:



$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$, $\angle C = \angle C_1 = 40° \Rightarrow$
$\triangle ABC \backsim \triangle A_1BC_1$.

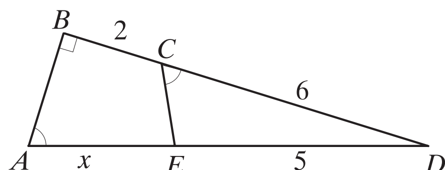
Įsitikinkite, kad Jono trikampiai yra panašūs.

Bet iš tikrųjų Jono „požymis“ *neteisingas*! Persibraižykite Jono brėžinį į sąsiuvinį ir pabandykite sukonstruoti trikampį A_2BC_1 tokį, kad būtų teisingos lygybės $A_2B = 3$, $BC_1 = 4$, $\angle C_1 = 40°$, bet $\triangle A_2BC_1$ *nebūtų* panašus į $\triangle ABC$.

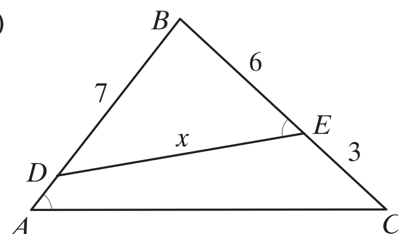
SPRENDŽIAME

108. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite x reikšmę.

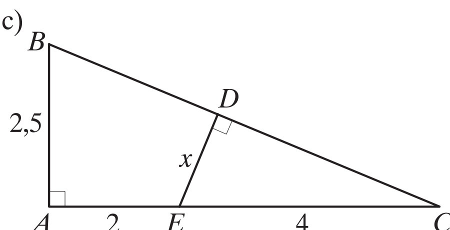
a)



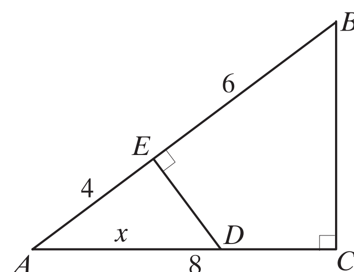
b)



c)



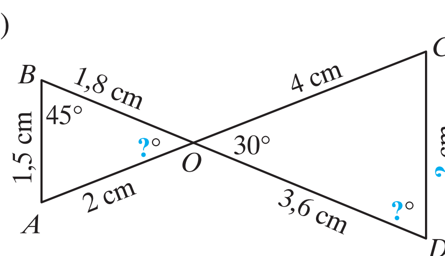
d)



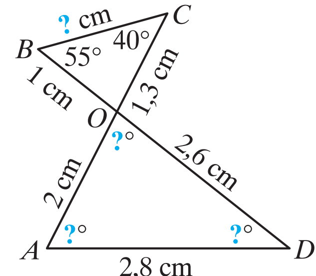
109. Trikampio ABC kraštinės yra $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CA = 7$ cm. Nubraižykite trikampį $A_1B_1C_1$, panašų į trikampį ABC, tokį, kad jo perimetras būtų lygus 25,5 cm.

110. Atkarpos AC ir BD susikerta taške O. Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite klaustukais pažymėtus dydžius.

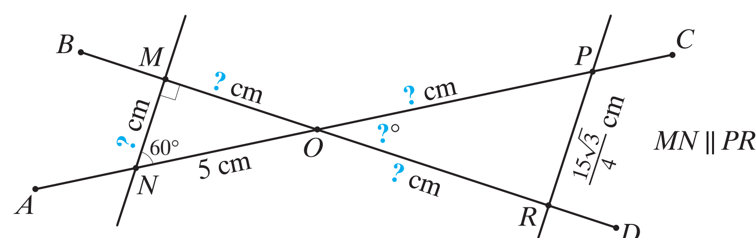
a)



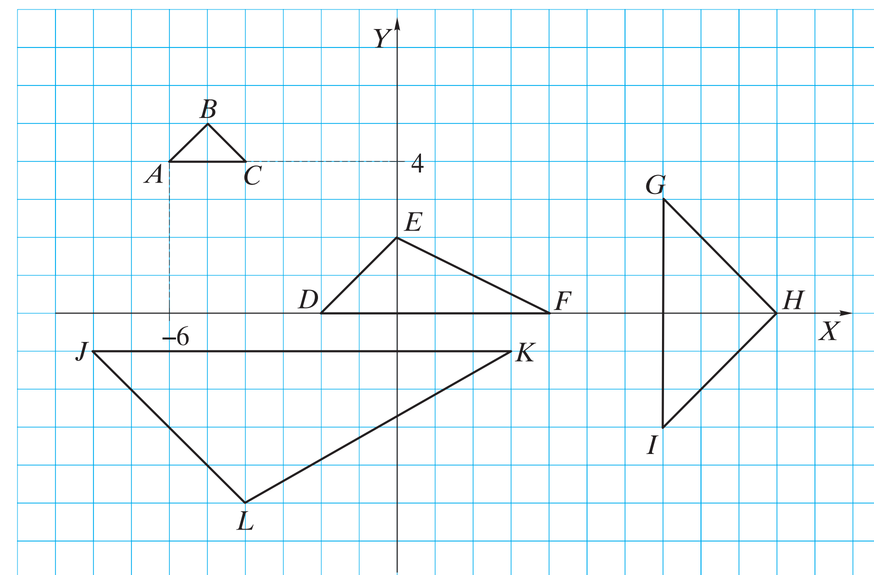
b)



c)



111. Koordinačių plokštumoje nubraižyti keturi trikampiai.



1) Kurie iš tų trikampių yra panašūs?
2) Apskaičiuokite panašiųjų trikampių panašumo koeficientą.



112. 1) Koordinačių plokštumoje nubraižykite $\triangle ABC$, kurio viršūnių koordinatės yra $A(1; 3)$, $B(-2; 2)$, $C(4; -3)$.
2) Toje pačioje koordinačių plokštumoje nubraižykite $\triangle A_1B_1C_1$, panašų į $\triangle ABC$, tokį, kad $\frac{A_1B_1}{AB} = 2$, o $A_1(2; 6)$.



113. Taip jau gyvenime kartais nutinka, kad susergi ... Taip nutiko ir vienam šauniam jaunuoliui. Tik štai tas jaunuolis susirgo iš karto dviem visai nebaisiom ligom. Mama, išeidama į darbą 8 valandą, paliko jam 4 tabletes: dvi — nuo vienos ligos, dvi — nuo kitos ligos.



Tas tabletes jaunuoliui reikia išgerti per du kartus: 10 valandą ir 14 valandą, kiekvieną kartą išgeriant po vieną tabletę nuo kiekvienos ligos. Bėda ta, kad tos 4 tabletės susimaišė ir niekaip neįmanoma atskirti, kurios tabletės yra nuo kurios ligos. Visa laimė, kad tas ligonis buvo tikrai šaunus ir nesunkiai sugalvojo, kaip jam su tuo susitvarkyti! Mama, grįžusi 18 valandą į namus, rado savo sūnų sveikut sveikutėlį. O ką jaunuolio vietoje būtumėte darę jūs?

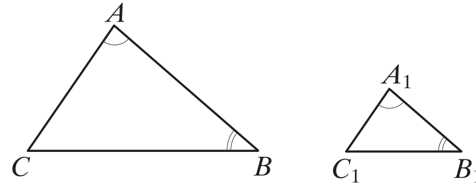
Trikampių panašumo požymių įrodymas

1. Trikampių panašumo požymis pagal du kampus

Duota: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$;
$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Įrodyti:

$$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1.$$



Įrodymas. Reikia įrodyti, kad:

$$\angle C = \angle C_1, \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}, \quad \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

1) Akivaizdu, kad $\angle C = \angle C_1$, nes

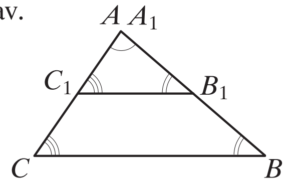
$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B, \quad \angle C_1 = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1.$$

2) Įsitikinkime, kad

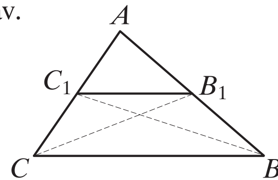
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Trikampį $A_1B_1C_1$ uždėkime ant $\triangle ABC$ (žr. 1 pav.) taip, kad $\angle A_1$ sutaptų su $\angle A$, B_1 atsidurtų tiesėje AB, o C_1 — tiesėje AC ($\triangle A_1B_1C_1$ gali tekti apversti).

1 pav.

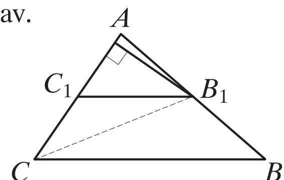


2 pav.



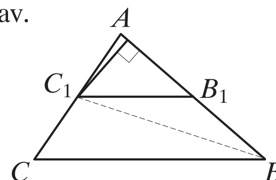
Kadangi $\angle B_1 = \angle B$ ($\angle C_1 = \angle C$), tai $B_1C_1 \parallel BC$. Sujunkime B_1 su C, o C_1 su B (žr. 2 pav.). Trikampių CB_1C_1 ir BC_1B_1 plotai yra lygūs, nes jų aukštinės iš C ir B yra lygios, o pagrindas (C_1B_1) — bendras.

3 pav.



$S_{\triangle CB_1C_1} = S_{\triangle BC_1B_1}$
$S_{\triangle CB_1A} = S_{\triangle BC_1A}$

4 pav.



Lygūs yra ir trikampių CB_1A ir BC_1A plotai.
Nubrėžkime $\triangle CB_1A$ aukštinę h, išeinančią iš B_1 (žr. 3 pav.).
Užrašykime, kam lygūs trikampių CB_1A ir C_1B_1A plotai:

$$S_{\triangle CB_1A} = \frac{AC \cdot h}{2}, \quad S_{\triangle C_1B_1A} = \frac{AC_1 \cdot h}{2}.$$

Raskime šių plotų santykį:

$$\frac{S_{\triangle CB_1A}}{S_{\triangle C_1B_1A}} = \frac{AC \cdot h}{2} : \frac{AC_1 \cdot h}{2} = \frac{AC}{AC_1}. \tag{1}$$

Lygiai taip pat, nagrinėdami trikampius BC_1A ir B_1C_1A (žr. 4 pav.), įsitikiname, kad

$$\frac{S_{\triangle BC_1A}}{S_{\triangle B_1C_1A}} = \frac{AB}{AB_1}. \tag{2}$$

Kadangi (1) ir (2) lygybių kairiosios pusės yra lygios, tai lygios ir dešiniosios pusės:

$$\frac{AC}{AC_1} = \frac{AB}{AB_1}.$$

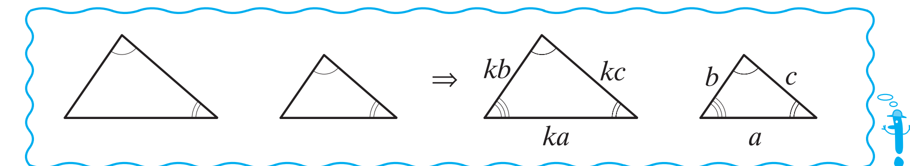
O tai reiškia, kad

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

3) Analogiškai galima įsitikinkti, kad teisingos ir kitos dvi proporcijos:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}, \quad \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Taigi, mes įrodėme, kad ***jei*** trikampiai turi po du atitinkamai lygius kampus, ***tai*** jų ir tretieji kampai yra atitinkamai lygūs bei tų trikampių atitinkamos kraštinės yra proporcingos. Kitaip sakant, įsitikinome, kad tokie trikampiai yra panašūs.

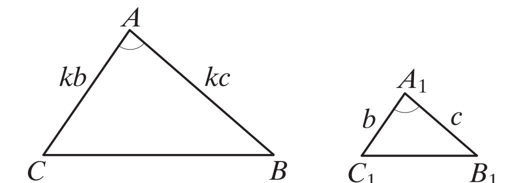


2. Trikampių panašumo požymis pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų

Duota: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$;
$\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} (= k)$.

Įrodyti:

$$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1.$$

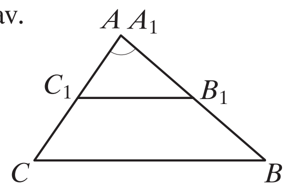


Įrodymas. Reikia įrodyti, kad:

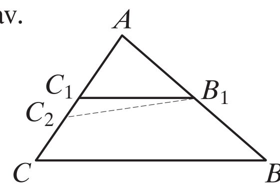
$$\angle C = \angle C_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \frac{CB}{C_1B_1} = \frac{AB}{A_1B_1} (= k), \quad \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{CB}{C_1B_1} (= k).$$

1) Trikampį $A_1B_1C_1$ uždėkime ant trikampio ABC taip, kad $\angle A_1$ sutaptų su $\angle A$ (žr. 1 pav.).

1 pav.



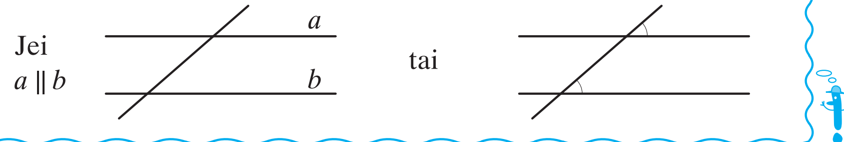
2 pav.



2) Įsitikinkime, kad

$$C_1B_1 \parallel CB.$$

Tarkime priešingai, kad C_1B_1 nelygiagreti su CB. Tuomet nubrėžkime B_1C_2 lygiagrečią su CB (žr. 2 pav.). Turime, kad $\triangle AC_2B_1 \backsim \triangle ACB$ (pagal du kampus), nes $\angle AC_2B_1 = \angle C$, $\angle AB_1C_2 = \angle B$ (tarėme, kad $C_2B_1 \parallel CB$).



Bet tada

$$\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_2},$$

o ši lygybė teisinga tik tada, kai taškas C_2 sutampa su C_1 (žr. duotąją proporciją). Taigi $C_1B_1 \parallel CB$. Prieštara.



Kas ta *prieštara?*

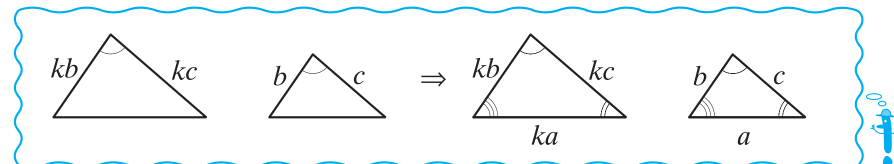
Tarę, kad $C_1B_1 \nparallel CB$, įsitikinome, kad taip būti negali!

3) Iš to, kad $CB \parallel C_1B_1$ seka, kad

$$\angle C = \angle C_1, \quad \angle B = \angle B_1.$$

O tai reiškia, kad $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ (pagal du atitinkamai lygius kampus, t. y. pagal prieš tai įrodytą požymį).

Taigi, mes įrodėme, kad ***jei*** trikampiai turi po dvi atitinkamai proporcingas kraštines ir po lygų kampą tarp tų kraštinių, ***tai*** jų ir trečiosios kraštinės yra proporcingos bei kitos dvi kampų poros yra atitinkamai lygios. Kitaip sakant, įsitikinome, kad tokie trikampiai yra panašūs.

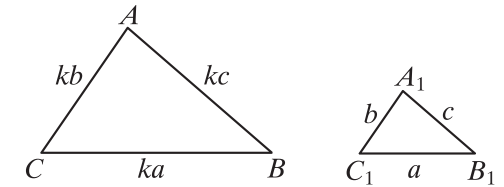


3. Trikampių panašumo požymis pagal tris kraštines

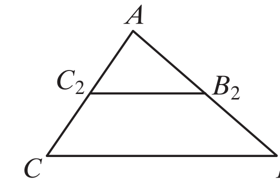
Duota: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$;
$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ $(= k)$.

Įrodyti:

$$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1.$$



Įrodymas. 1) Trikampio ABC kraštinėje AB pažymėkime atkarpą $AB_2 = A_1B_1$, o kraštinėje AC — atkarpą $AC_2 = A_1C_1$. Taškus B_2 ir C_2 sujunkime.



$\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$, vadinasi, tereikia įsitikinti, kad $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

2) $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų, t. y. pagal prieš tai įrodytą požymį), nes $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, o $\angle A$ yra bendras.

3) Vadinasi,

$$\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{AC}{AC_2}.$$

4) Kadangi $AB_2 = A_1B_1$, o $AC_2 = A_1C_1$, tai

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

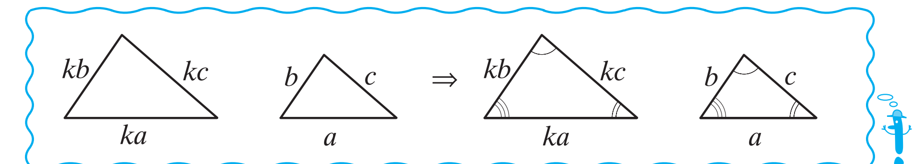
5) Šias proporcijas palyginę su duotosiomis proporcijomis

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

gauname, kad $B_2C_2 = B_1C_1$.

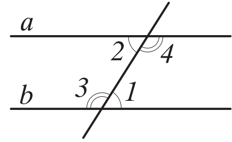
6) Taigi $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ (pagal tris kraštines). Todėl $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Taigi, mes įrodėme, kad ***jei*** trikampių atitinkamos kraštinės yra proporcingos, ***tai*** jų atitinkami kampai yra lygūs. Kitaip sakant, įsitikinome, kad tokie trikampiai yra panašūs.



6.5. KAIP NUO TRIKAMPIO ATKIRSTI PANAŠŲ Į JĮ TRIKAMPĮ

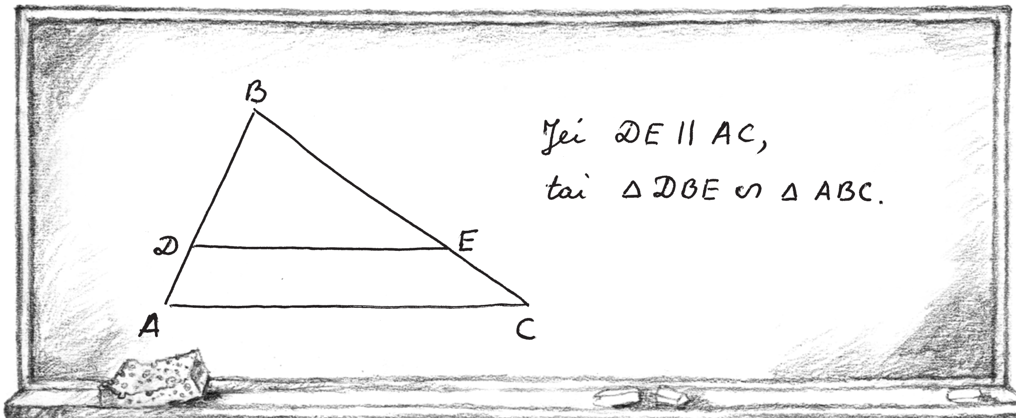
Prisiminkime:



Jei $a \parallel b$,
tai $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,
$\angle 1 + \angle 4 = 180°$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

1 užduotis.

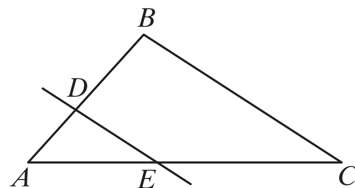
1) Nubraižykite kokį nors trikampį ABC.
2) Nubrėžkite atkarpą DE, kurios galai būtų trikampio kraštinėse AB ir BC ir kuri būtų lygiagreti su trečia trikampio kraštine AC.



3) Įsitikinkite, kad $\triangle ADE$ yra panašus į $\triangle ABC$.

2 užduotis.

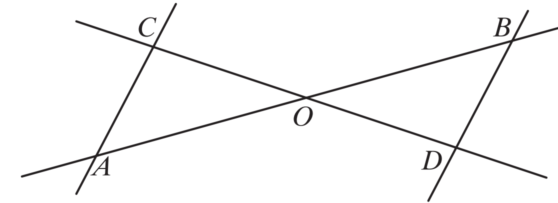
1) Pasakykite, kaip nuo duotojo trikampio atkirsti trikampį, panašų į duotąjį.
2) Nustatykite, kas turėtų būti parašyta vietoj daugtaškių.



Jei $DE \parallel BC$, ***tai*** $\triangle ADE \backsim$ ...

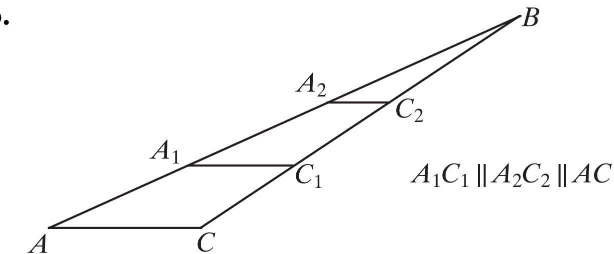
Tiesė, kertanti dvi trikampio kraštines ir lygiagreti su trečia trikampio kraštine, nuo to trikampio atkerta ...

114. Tiesės AB ir CD kertasi taške O. Tiesės CA ir BD yra lygiagrečios.



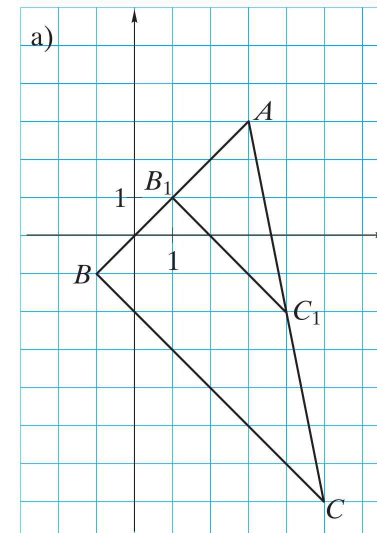
Nematuodami įsitikinkite, kad $\triangle ACO \backsim \triangle BDO$.

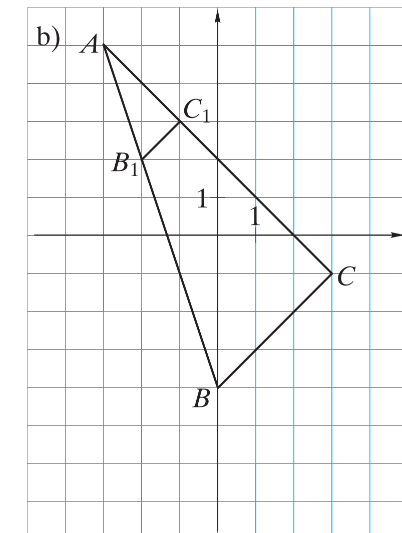
115.



1) Paaiškinkite, kodėl:
$\triangle ABC \backsim \triangle A_1BC_1$, $\triangle ABC \backsim \triangle A_2BC_2$, $\triangle A_1BC_1 \backsim \triangle A_2BC_2$.
2) Apskaičiuokite tų trikampių panašumo koeficientus, jei:
$AA_1 = 2$ cm, $A_1A_2 = 2$ cm, $BC_2 = 2$ cm, $C_2C_1 = 1{,}5$ cm,
$AC = 2$ cm.
3) Apskaičiuokite CC_1.
4) Apskaičiuokite $\triangle A_2BC_2$ perimetrą.

116. Įsitikinkite, kad $\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1$. Apskaičiuokite jų panašumo koeficientą.

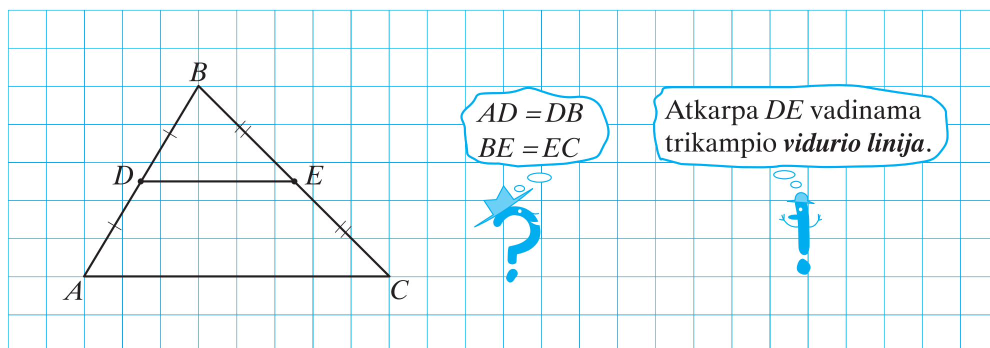




6.6. TRIKAMPIO VIDURIO LINIJA IR JOS SAVYBĖS

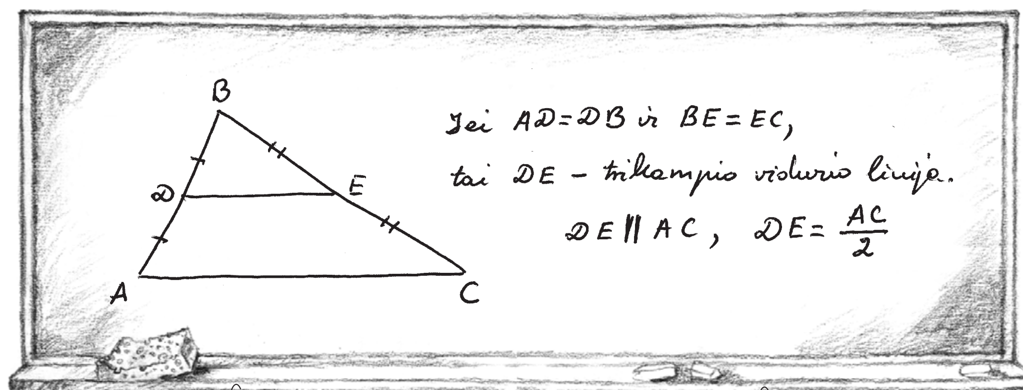
1 užduotis.

1) Sąsiuvinyje nusibraižykite kokį nors trikampį ABC.
2) Dviejose kraštinėse pažymėkite jų vidurio taškus.
3) Tuos taškus sujunkite atkarpa.



4) Įsitikinkite, kad gautoji atkarpa yra lygiagreti su trečiąja trikampio kraštine ir kad ji yra dvigubai trumpesnė už tą kraštinę.

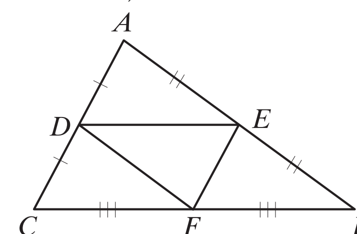
2 užduotis. Pasakykite, ką vadiname trikampio vidurio linija ir kokiomis savybėmis ji pasižymi.



Atkarpa, jungianti dviejų trikampio kraštinių vidurio taškus, vadinama trikampio ***vidurio linija***.

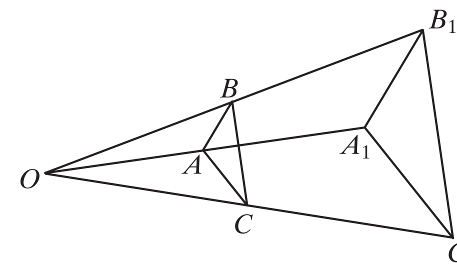
Trikampio vidurio linija yra:
- lygiagreti su trečiąja trikampio kraštine;
- lygi trečiosios kraštinės ilgio pusei.

117. Apskaičiuokite $\triangle DEF$ perimetrą, kai $AD = 1$ cm, $DF = 1{,}2$ cm, $CF = 1{,}3$ cm.

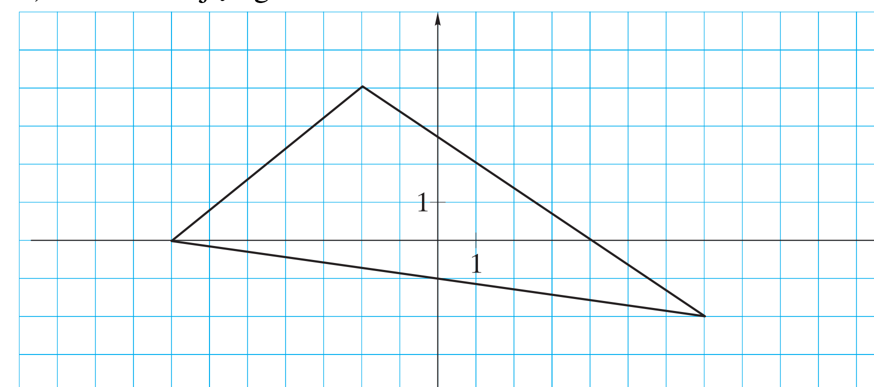


118. Trikampio ABC viršūnių koordinatės $A(3; 4)$, $B(-2; -7)$, $C(3; -5)$. Apskaičiuokite trikampio visų trijų vidurio linijų ilgius.

119. 1) Nubraižykite bet kokį trikampį ABC.
2) Šalia to trikampio pažymėkite tašką O.
3) Iš taško O nubrėžkite spindulius OA, OB ir OC.
4) Tuose spinduliuose pažymėkite taškus A_1, B_1 ir C_1 taip, kad $OA_1 = 2 \cdot OA$, $OB_1 = 2 \cdot OB$, $OC_1 = 2 \cdot OC$.
5) Įsitikinkite, kad $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.
6) Kam lygus tų trikampių panašumo koeficientas?

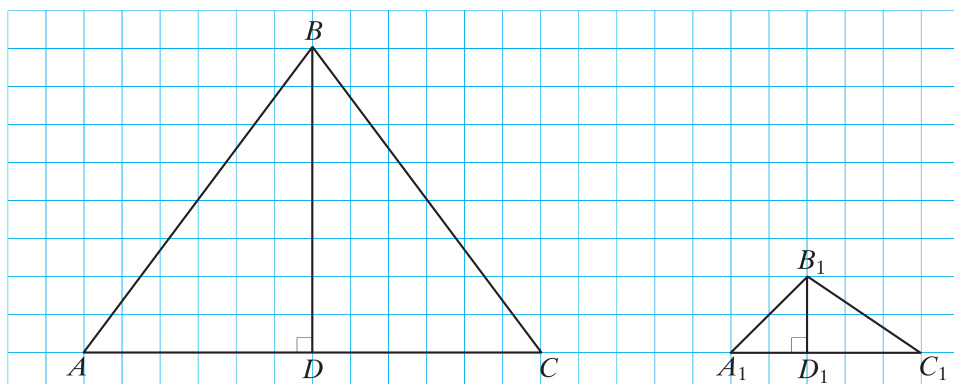


120. Apskaičiuokite koordinačių plokštumoje nubraižyto trikampio:
1) kraštinių vidurio taškų koordinates;
2) vidurio linijų ilgius.



6.7. KAM LYGUS PANAŠIŲJŲ TRIKAMPIŲ PLOTŲ SANTYKIS

1 užduotis. Paveikslėlyje pavaizduoti du panašieji trikampiai. Į tų trikampių atitinkamas kraštines nubrėžtos aukštinės.

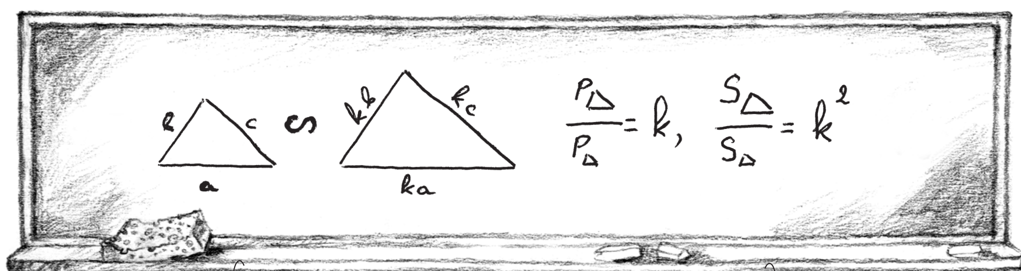


1) Išmatuokite kraštinių AC ir A_1C_1 ilgius ir apskaičiuokite tų trikampių panašumo koeficientą k.
2) Išmatuokite aukštinių BD ir B_1D_1 ilgius ir įsitikinkite, kad $\frac{BD}{B_1D_1} = k$.
3) Apskaičiuokite tų trikampių plotus $S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2} = ?$ ir $S_{\triangle A_1B_1C_1} = ?$.
4) Apskaičiuokite tų plotų santykį ir įsitikinkite, kad jis lygus panašumo koeficiento kvadratui, t. y.:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = k^2.$$

2 užduotis. Nustatykite, kam lygus tų trikampių perimetrų santykis:

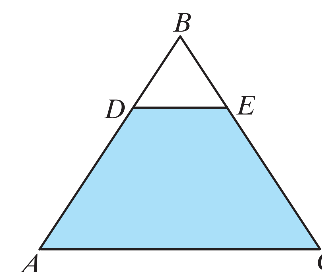
$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = ?.$$



- Panašiųjų trikampių perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui.
- Panašiųjų trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.

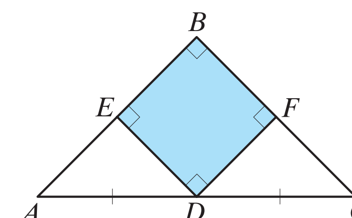
121. Apskaičiuokite nuspalvintos trikampio dalies plotą.

a)



$DE \parallel AC$,
$DB = 2$ cm,
$AD = 4$ cm,
$S_{BDE} = 2$ cm^2,
$S_{DECA} = ?$ cm^2.

b)

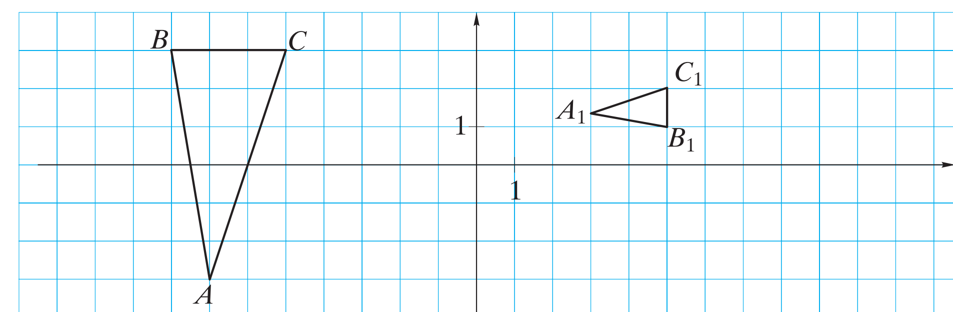


$S_{ABC} = 25$ cm^2,
$AD = DC$,
$S_{EBFD} = ?$ cm^2.

122. a) Vieno trikampio plotas lygus 32,4 cm^2, o kito — 54 cm^2. Trumpiausios tų trikampių kraštinės atitinkamai yra lygios 54 cm ir 9 cm. Ar tie trikampiai yra panašūs?

b) Vieno trikampio plotas yra 72 dm^2, o kito — 32 dm^2. Ilgiausios tų trikampių kraštinės atitinkamai lygios 12,6 dm ir 8,4 dm. Ar tie trikampiai yra panašūs?

123. Koordinačių plokštumoje nubraižyti du panašieji trikampiai: $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1B_1C_1$.



1) Apskaičiuokite kraštinės BC ir į ją nubrėžtos aukštinės AD ilgius.
2) Apskaičiuokite $\triangle ABC$ plotą.
3) Apskaičiuokite, kiek kartų $\triangle A_1B_1C_1$ kraštinės yra trumpesnės už atitinkamas $\triangle ABC$ kraštines.
4) Apskaičiuokite $\triangle A_1B_1C_1$ plotą.

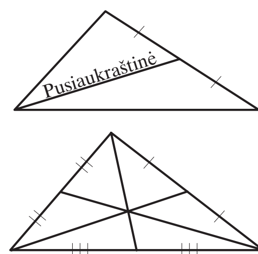
6.8. TRIKAMPIO PUSIAUKRAŠTINIŲ SAVYBĖ

Užduotis.

1) Nubraižykite kokį nors trikampį ABC.
2) Nubrėžkite visas tris jo pusiaukraštines.

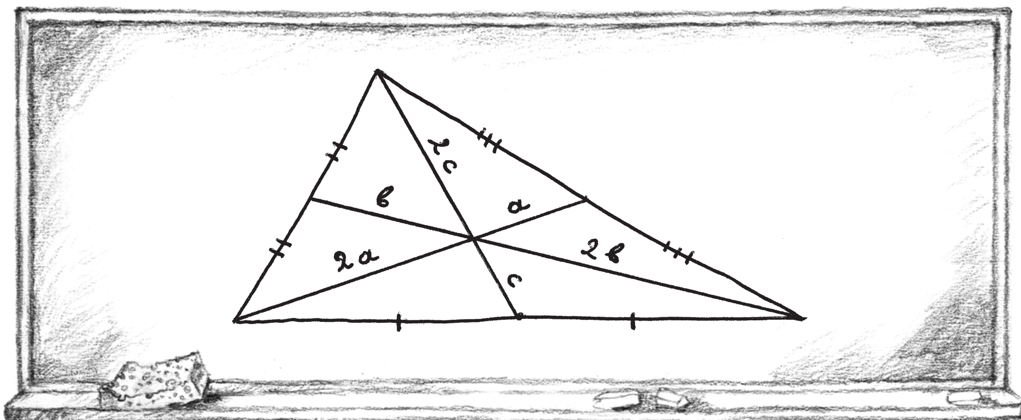
Prisiminkime:

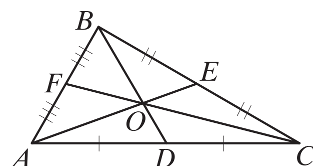
- Trikampio pusiaukraštinė — tai atkarpa, jungianti trikampio viršūnę su prieš ją esančios kraštinės vidurio tašku.
- Trikampis turi tris pusiaukraštines.
- Visos trikampio pusiaukraštinės susikerta viename taške.



3) Matuodami įsitikinkite, kad teisingas toks teiginys:

Trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas kiekvieną pusiaukraštinę dalija į dvi atkarpas, kurių viena (einanti nuo trikampio viršūnės) yra dvigubai ilgesnė už kitą.

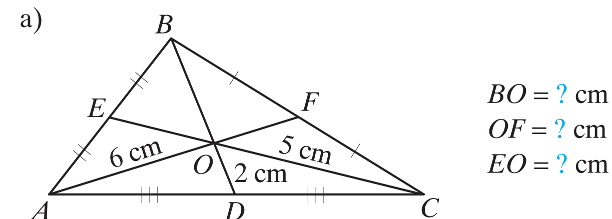




Jei $BO = 5\,\text{cm}$, tai $OD = \frac{5}{2} = 2{,}5\,(\text{cm})$.
Jei $OE = 3\,\text{cm}$, tai $AO = 2 \cdot 3 = 6\,(\text{cm})$.
Jei $CF = 3\,\text{cm}$, tai $CO = 2\,\text{cm}$, $OF = 1\,\text{cm}$.

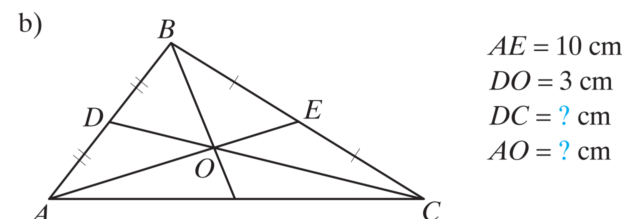
124. Apskaičiuokite, kas turėtų būti parašyta vietoj klaustukų.

a)



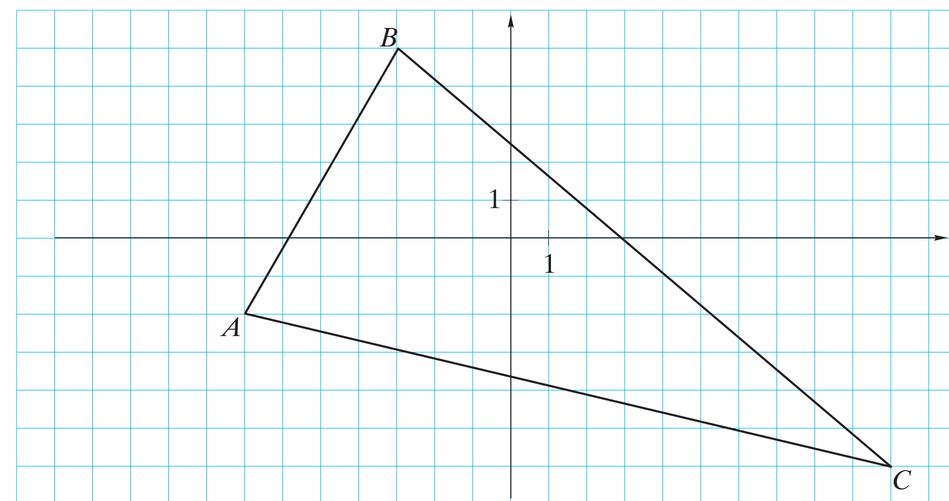
$BO = ?$ cm
$OF = ?$ cm
$EO = ?$ cm

b)



$AE = 10$ cm
$DO = 3$ cm
$DC = ?$ cm
$AO = ?$ cm

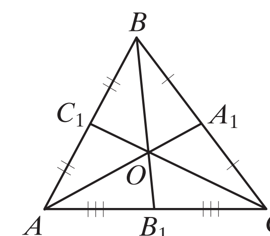
125. Koordinačių plokštumoje nubraižytas trikampis ABC.



1) Apskaičiuokite trikampio kraštinių vidurio taškų koordinates.
2) Apskaičiuokite trikampio pusiaukraštinių ilgius.
3) Apskaičiuokite, į kokio ilgio atkarpas trikampio pusiaukraštines dalija jų susikirtimo taškas.

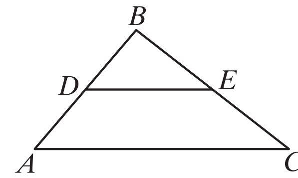
126. Apskaičiuokite, kam lygus nurodytų figūrų plotų santykis.

a) $S_{AOB} : S_{AOB_1}$;
b) $S_{AOB} : S_{ABC}$;
c) $S_{OA_1CB_1} : S_{ABC}$.



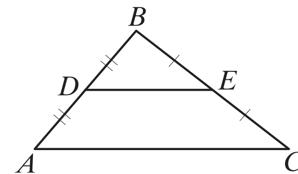
APIBENDRINAME

Atkarpa, kurios galai yra trikampio dviejose kraštinėse ir kuri yra lygiagreti su trečiąja to trikampio kraštine, nuo to trikampio atkerta trikampį, panašų į duotąjį.



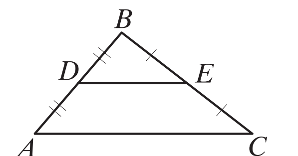
Jei $DE \parallel AC$, tai $\triangle DBE \backsim \triangle ABC$.

Atkarpa, jungianti dviejų trikampio kraštinių vidurio taškus, vadinama trìkampio ***vìdurio lìnija***.
Trikampis turi tris vidurio linijas.



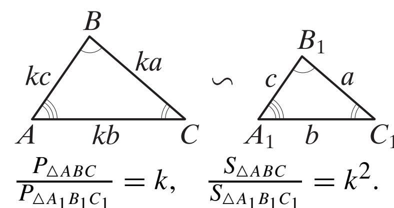
$BD = DA$, $BE = EC$,
DE — vidurio linija.

Trikampio vidurio linija yra lygiagreti su viena trikampio kraštine ir yra lygi jos pusei.



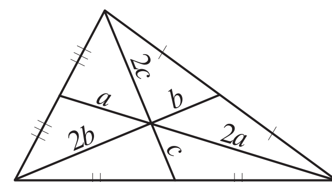
$DE \parallel AC$, $\quad DE = \frac{AC}{2}$.

Panašiųjų trikampių perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui.
Panašiųjų trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.



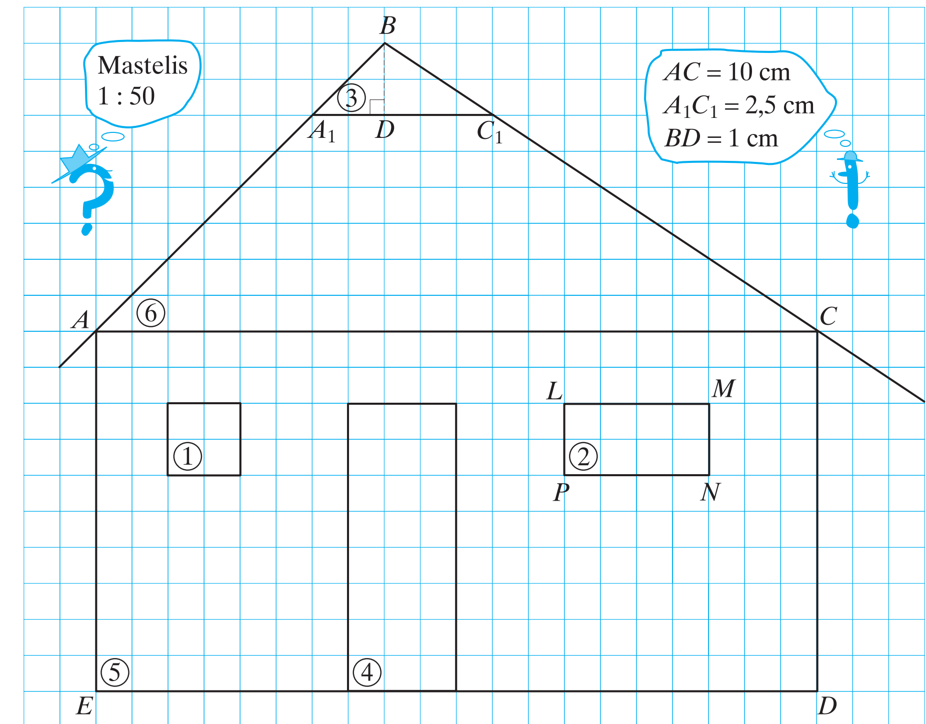
$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = k$, $\quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = k^2$.

Trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas kiekvieną pusiaukraštinę padalija santykiu 2 : 1, skaičiuojant nuo viršūnės.



Namelis

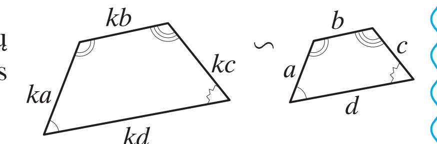
Prisiminkime skyriaus pradžioje pavaizduotą namelį (žr. 42 psl.).



1) Paaiškinkite, kodėl palėpės siena ($\triangle ABC$) ir palėpės langas ($\triangle A_1BC_1$) yra panašieji trikampiai. Kam lygus tų trikampių panašumo koeficientas k?
2) Apskaičiuokite lango ($\triangle A_1BC_1$) plotą S_3.
3) Naudodamiesi k ir S_3 reikšmėmis, apskaičiuokite palėpės ($\triangle ABC$), įskaitant ir langą, plotą S_6.

Šiame skyriuje sužinojote, kad panašiųjų trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui. Pasirodo, šis teiginys tinka ir panašiesiems keturkampiams.

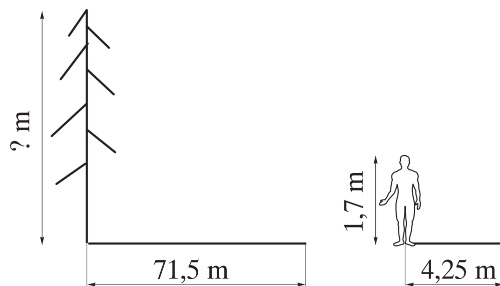
Keturkampiai vadinami panašiaisiais, jeigu jų atitinkami kampai lygūs ir atitinkamos kraštinės proporcingos.



4) Patikrinkite, ar stačiakampiai $ACDE$ ir $LMNP$ yra panašūs.
5) Matuodami apskaičiuokite jų panašumo koeficientą n.
6) Matuodami apskaičiuokite jų plotus ir įsitikinkite, kad $\frac{S_{ACDE}}{S_{LMPN}} = n^2$.
7) Nustatykite, kiek kartų skiriasi plotai brėžinyje (S_1, S_2, S_3, S_4, ...) nuo atitinkamų plotų tikrovėje (S'_1, S'_2, S'_3, S'_4, ...).

SPRENDŽIAME

127. a) Medžio šešėlio ilgis lygus 71,5 m. Šalia stovinčio žmogaus, kurio ūgis 1,7 m, šešėlio ilgis yra 4,25 m. Apskaičiuokite medžio aukštį.



Objekto aukštį galima apskaičiuoti pasinaudojant to objekto šešėliu!

b) Gamyklos kamino šešėlio ilgis lygus 32,5 m, o netoliese esančio stulpo, kurio aukštis 2,4 m, šešėlio ilgis lygus 2,72 m. Apskaičiuokite kamino aukštį.

128. Trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra panašūs. Apskaičiuokite tų trikampių:

a) plotus, jeigu $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{4}{5}$, $S_{ABC} + S_{A_1B_1C_1} = 410\,\text{cm}^2$;

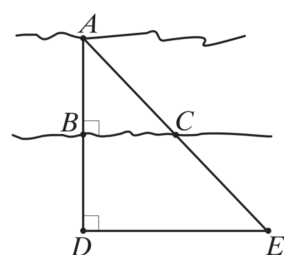
b) perimetrus, jeigu $S_{ABC} = 180\,\text{cm}^2$, $S_{A_1B_1C_1} = 80\,\text{cm}^2$, $P_{ABC} + P_{A_1B_1C_1} = 240\,\text{cm}$;

c) plotus, jeigu $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{3}{2}$, $S_{ABC} - S_{A_1B_1C_1} = 40\,\text{cm}^2$;

d) perimetrus, jeigu $S_{ABC} = 180\,\text{cm}^2$, $S_{A_1B_1C_1} = 80\,\text{cm}^2$, $P_{ABC} - P_{A_1B_1C_1} = 85\,\text{cm}$.

129. Trikampio vidurio linija lygi 15 cm, o plotas lygus 180 cm^2. Apskaičiuokite ilgį tos trikampio aukštinės, kuri yra statmena tai vidurio linijai.

130. 1) Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite upės plotį.

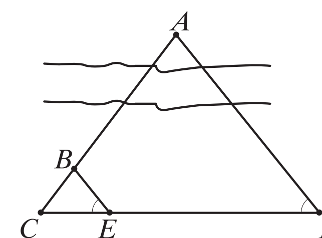


$BD = 21$ m,
$BC = 25$ m,
$DE = 40$ m,
$AB =$? m.

Upės plotį galima apskaičiuoti jo nematuojant!

2) Įsivaizduokite, kad esate prie upės. Jums reikia, neplaukiant į kitą upės krantą, nustatyti jos plotį. Pabandykite paaiškinti, kaip tai galima padaryti.

131. 1) Naudodamiesi brėžinio duomenimis, apskaičiuokite atstumą tarp taškų A ir B.

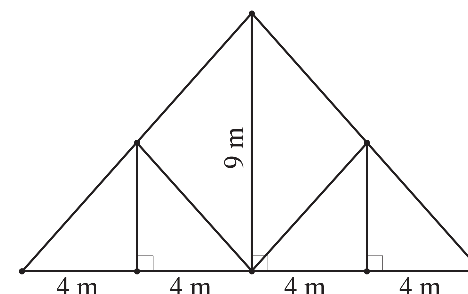


$CB = 20$ m,
$CE = 25$ m,
$ED = 75$ m,
$AB =$? m.

Atstumą tarp dviejų objektų galima nustatyti jo nematuojant!

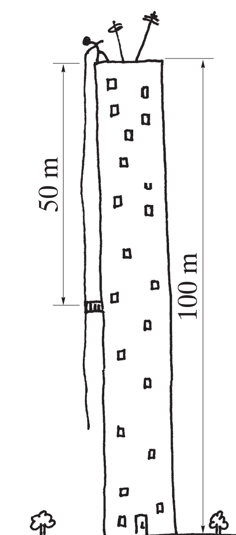
2) Pabandykite paaiškinti, kaip galima nustatyti atstumą tarp dviejų objektų, to atstumo nematuojant.

132. Brėžinyje pavaizduota iš skirtingo ilgio virbų suvirinta simetriška metalinė konstrukcija. Apskaičiuokite virbų ilgių sumą. Atsakymą parašykite 0,1 m tikslumu.





133. Taip jau nutiko, kad gerasis jaunuolis užsiropštė ant namo stogo. To namo aukštis 100 m. Kaip žinia, kai kur nors užsilipi, tai dažniausiai tenka ir nulipti. Bėda ta, kad lipti žemyn teks kaip alpinistui. Bet gerai tai, kad jaunuolis turi 75 m ilgio virvę. Dar viena gera naujiena, kad tą virvę galima pririšti prie namo stogo, o kita gera naujiena yra ta, kad ties namo viduriu, 50 m atstumu nuo žemės, yra balkonas, prie kurio vėl galima pririšti virvę.
Tuo geros naujienos nesibaigia. Jaunuolis, kaip ir dera geram alpinistui, turi peilį, kuriuo virvę gali pjaustyti (tik, žinoma, ne išilgai). Kaip saugiai nusileisti nuo stogo ant žemės?

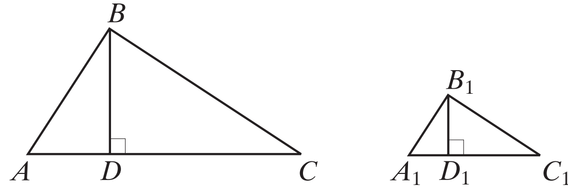


Viena teorema ir jos išvada

Teorema. *Panašiųjų trikampių atitinkamos aukštinės proporcingos atitinkamoms kraštinėms.*

Duota: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$,
$BD \perp AC$, $B_1D_1 \perp A_1C_1$.
Įrodyti:

$$\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$



Įrodymas. Kadangi $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, tai trikampių kraštinės yra proporcingos, t. y.:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}.$$

Įrodysime, kad

$$\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

kur BD ir B_1D_1 — atitinkamos trikampių aukštinės.

$$\triangle BDC \backsim \triangle B_1D_1C_1,$$

nes

$$\angle C = \angle C_1, \quad \angle BDC = \angle B_1D_1C_1 = 90°.$$

Vadinasi,

$$\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Kadangi

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

tai

$$\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Kitaip sakant, mes įrodėme, kad jei panašiųjų trikampių panašumo koeficientas lygus k, tai tų trikampių atitinkamų aukštinių santykis lygus panašumo koeficientui k.

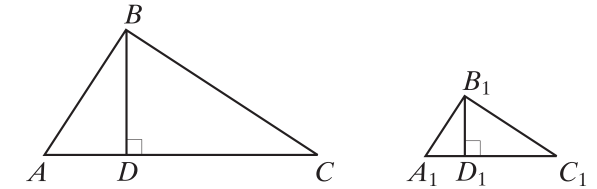


Išvada. *Panašiųjų trikampių plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.*

Duota: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.
Įrodyti:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2;$$

čia k — panašumo koeficientas.



Įrodymas. Kadangi $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, tai, remdamiesi prieš tai įrodyta teorema, galime užrašyti proporcijas:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1} = k.$$

Iš čia $AC = k \cdot A_1C_1$, $BD = k \cdot B_1D_1$. Pasinaudoję šiomis lygybėmis, gauname:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot (k \cdot A_1C_1) \cdot (k \cdot B_1D_1) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot k^2 \cdot A_1C_1 \cdot B_1D_1 = k^2 \cdot S_{A_1B_1C_1}.$$

Vadinasi, $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$.

Uždaviniai

1. Trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ yra panašūs. Žinoma, kad:
a) $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A_1B_1C_1} = 9$;
b) $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = 2$;
c) $S_{\triangle ABC} = 16 \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}$;
d) $S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{3}$.
1) Apskaičiuokite $P_{\triangle ABC}$, jei $P_{\triangle A_1B_1C_1} = 10$ cm.
2) Kam lygi $\triangle ABC$ aukštinė AD, jei $\triangle A_1B_1C_1$ aukštinė $A_1D_1 = 1$ cm?

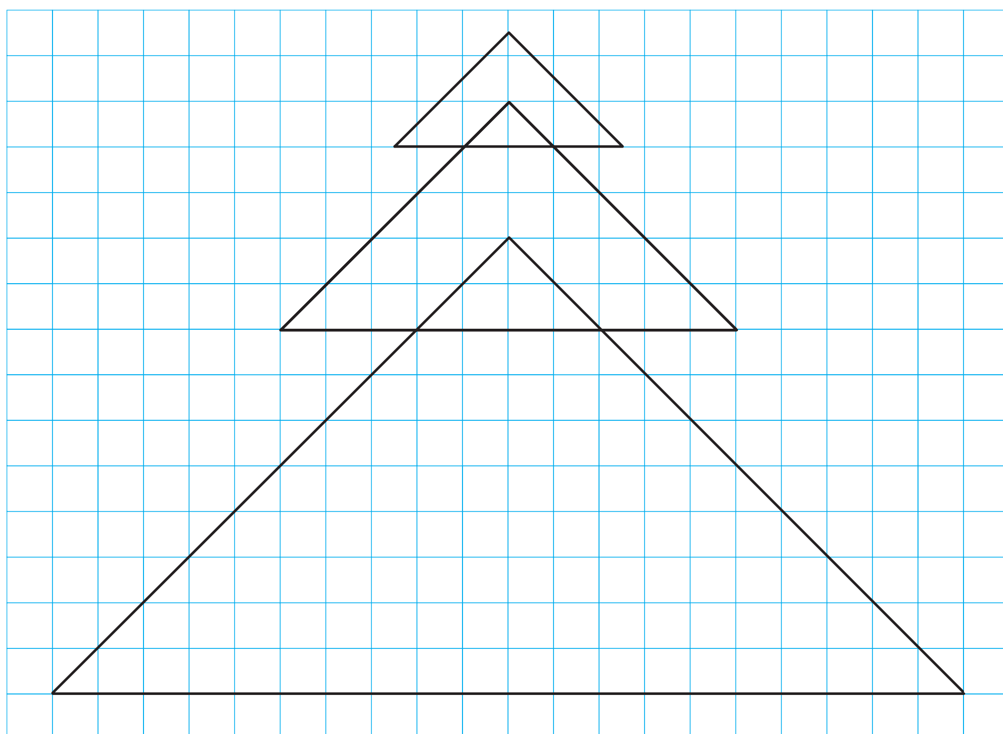
2. Žinome, kad teisingi tokie teiginiai:
- ***jei*** trikampiai yra panašūs, ***tai*** jų perimetrų santykis lygus panašumo koeficientui;
- ***jei*** trikampiai yra panašūs, ***tai*** jų plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui;
- ***jei*** trikampiai yra panašūs, ***tai*** jų atitinkamų aukštinių santykis yra lygus panašumo koeficientui.

Kaip manote, ar teisingi tokie teiginiai:
- ***jei*** trikampiai yra panašūs, ***tai*** jų atitinkamų pusiaukampinių santykis yra lygus panašumo koeficientui;
- ***jei*** trikampiai yra panašūs, ***tai*** jų atitinkamų pusiaukraštinių santykis yra lygus panašumo koeficientui?

3. a) Panašiųjų trikampių panašumo koeficientas $k = \frac{3}{5}$, o jų perimetrų suma lygi 240 cm. Apskaičiuokite trikampių perimetrus.
b) Panašiųjų trikampių trumpiausios kraštinės atitinkamai lygios 18,5 cm ir 7,4 cm. Tų trikampių perimetrų skirtumas lygus 1,5 m. Apskaičiuokite trikampių perimetrus.

TESTAS

134. Paveikslėlyje pavaizduota „eglutė“ suklijuota iš trijų panašių lygiašonių stačiųjų trikampių. Didysis (apatinis) trikampis yra 2 kartus didesnis už vidurinįjį trikampį. Mažasis (viršutinis) trikampis yra du kartus mažesnis už vidurinįjį trikampį.



a) Kiek kartų didysis (apatinis) trikampis yra didesnis už mažąjį (viršutinį) trikampį?

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 16

b) Kiek kartų viršutinio trikampio perimetras yra mažesnis už viduriniojo trikampio perimetrą?

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 16

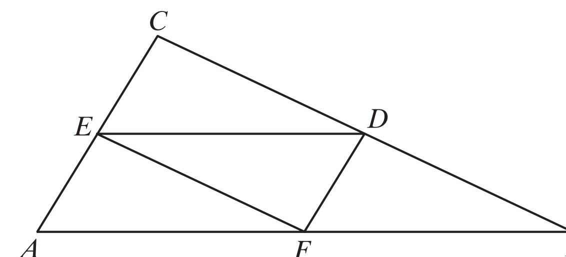
c) Kiek kartų didžiojo trikampio plotas yra didesnis už mažojo trikampio plotą?

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 16

d) Kam lygus viduriniojo trikampio plotas, jei didžiojo trikampio aukštinė, nubrėžta į įžambinę, lygi 5 cm?

A $25\,\text{cm}^2$ **B** $\frac{25}{2}\,\text{cm}^2$ **C** $\frac{25}{4}\,\text{cm}^2$ **D** $100\,\text{cm}^2$ **E** $50\,\text{cm}^2$

135. Trikampio ABC kraštinių ilgiai yra a, b ir c centimetrų.



Trikampio DEF viršūnės yra trikampio ABC kraštinių vidurio taškai.

a) Kam lygus $\triangle DEF$ perimetras?

A $2\cdot(a+b+c)$ **B** $\frac{a+b+c}{2}$ **C** $\frac{c}{2}$ **D** $\frac{c}{2}+a+b$ **E** $a+b+c$

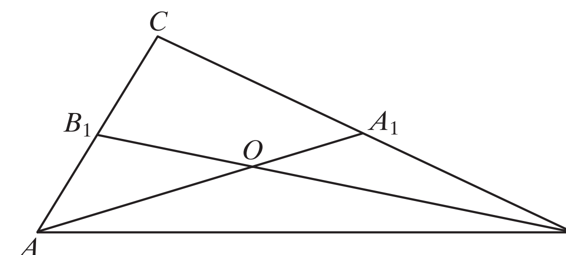
b) Kuris teiginys yra neteisingas?

A $S_{\triangle ABC}=4\cdot S_{\triangle EDC}$ **B** $\triangle EDC \backsim \triangle ABC$

C $EFDC$ — lygiagretainis **D** $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle FDB}$

E $\triangle EDF \neq \triangle FBD$

136. Trikampyje ABC nubrėžtos dvi jo pusiaukraštinės BB_1 ir AA_1. Tos pusiaukraštinės susikerta taške O.



a) Koks pusiaukraštinės BB_1 ilgis, jei $B_1O=a$ cm?

A $2a$ **B** $3a$ **C** $2a^2$ **D** $\frac{3a}{2}$ **E** Nustatyti neįmanoma

b) Koks keturkampio B_1CA_1O perimetras, jei $BB_1=9$ cm, $AO=$ $=4$ cm, $AC=5$ cm, $A_1B=4$ cm?

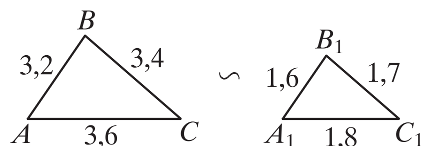
A 11,5 cm **B** 18,5 cm **C** 11 cm **D** 14 cm
E Nustatyti neįmanoma

c) Koks pusiaukraštinės CC_1 ilgis, jei $AB=10$ cm, $BB_1=8$ cm, $AA_1=7$ cm?

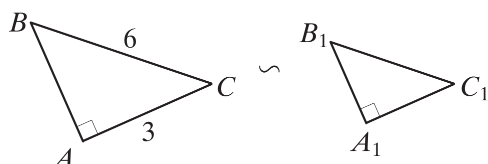
A 12,5 cm **B** 6 cm **C** 8 cm **D** 7,5 cm **E** Nustatyti neįmanoma

PASITIKRINAME

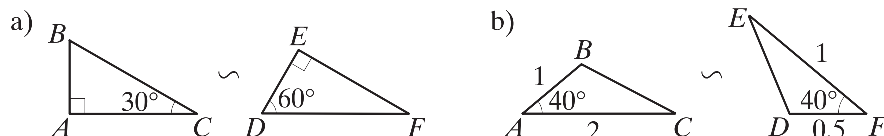
137. Pavaizduoti trikampiai yra panašūs. Apskaičiuokite tų trikampių panašumo koeficientą.

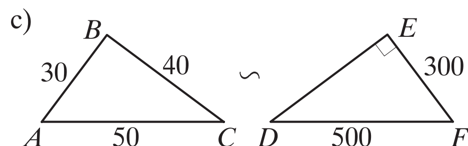


138. Pavaizduoti trikampiai yra panašūs. Jų panašumo koeficientas lygus 1,5. Apskaičiuokite $\triangle A_1B_1C_1$ kraštinių ilgius ir kampų dydžius.



139. 1) Kuo remiantis galima tvirtinti, kad pavaizduoti trikampiai yra panašūs?





2) Surašykite tų trikampių atitinkamas kraštines ir atitinkamus kampus.

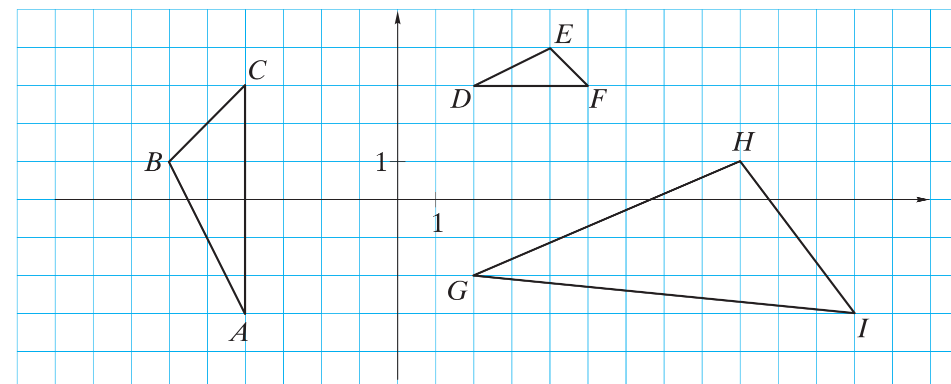
140. 1) Kokie trikampiai vadinami panašiais?
2) Ką vadiname trikampių panašumo koeficientu?
3) Kokie yra trikampių panašumo požymiai?
4) Jei $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, o $\frac{AB}{A_1B_1} = k$, tai kam lygus santykis:

$\frac{BC}{B_1C_1}$? $\frac{A_1C_1}{AC}$?

$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}}$? $\frac{P_{\triangle A_1B_1C_1}}{P_{\triangle ABC}}$?

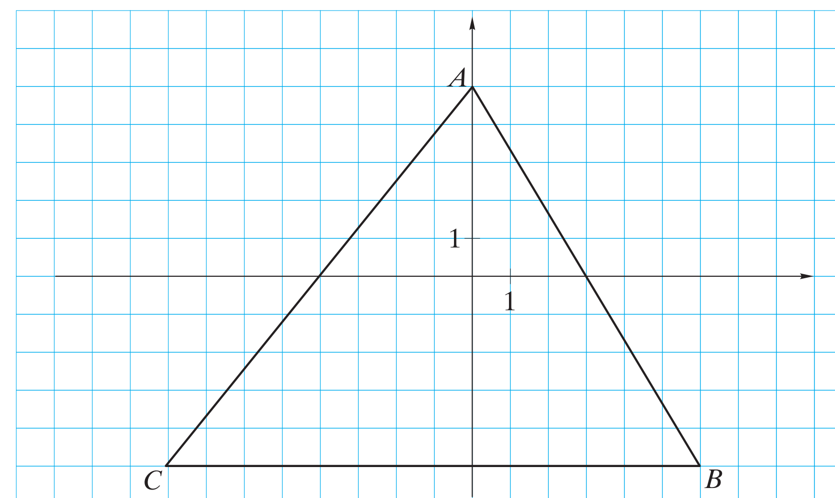
$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}}$? $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}$?

141. Du iš trijų koordinačių plokštumoje pavaizduotų trikampių yra panašūs.



1) Kurie trikampiai yra panašūs? Apskaičiuokite tų trikampių panašumo koeficientą.
2) Apskaičiuokite trikampio ABC kraštinių vidurio taškų koordinates bei visų trijų jo vidurio linijų ilgius.

142. 1) Nusibraižykite koordinačių plokštumą, kurios vienetinių atkarpų ilgis lygus 0,5 cm.
2) Toje koordinačių plokštumoje nubraižykite $\triangle A_1B_1C_1$, panašų į paveikslėlyje pavaizduotą trikampį ABC, bet dvigubai už jį mažesnį.



3) Apskaičiuokite $\triangle ABC$ plotą kvadratiniais centimetrais.
4) Apskaičiuokite $\triangle A_1B_1C_1$ plotą kvadratiniais milimetrais.
5) Apskaičiuokite $\triangle ABC$ pusiaukraštinės AD ilgį centimetrais.
6) Apskaičiuokite $\triangle A_1B_1C_1$ pusiaukraštinės A_1D_1 ilgį milimetrais.
7) Taškas M yra $\triangle ABC$ pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Apskaičiuokite atkarpų AM ir MD ilgius milimetrais.

KARTOJAME

143. Užrašykite reiškinį $f(x)$, kurio reikšmės apskaičiuojamos naudojantis tokia taisykle:
a) iš skaičių 5 ir x sandaugos atimama 3;
b) skaičių 5 ir x suma dauginama iš -3;
c) skaičių 5 ir x skirtumas dalijamas iš tų skaičių sumos;
d) randama skaičių 5 ir x kvadratų suma;
e) randamas skaičių 5 ir x skirtumo kvadratas;
f) randama kvadratinė šaknis iš skaičių -5 ir x sandaugos;
g) randama kvadratinė šaknis iš skaičių -5 ir x kvadratų sumos;
h) skaičių -5 ir x skirtumo kvadratas padalijamas iš tų skaičių kvadratų sumos.

144. Duotas reiškinys $f(x)$:
a) $f(x) = -2x$; b) $f(x) = -x + \frac{1}{2}$; c) $f(x) = \frac{x-2}{3}$;
d) $f(x) = -2x^2$; e) $f(x) = x^2 - 1$; f) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$;
g) $f(x) = \frac{1}{x}$; h) $f(x) = -\frac{5}{x}$; i) $f(x) = \sqrt{x}$.
1) Apskaičiuokite $f(5)$; $f(-5)$; $f\left(\frac{1}{5}\right)$; $f\left(-\frac{1}{5}\right)$.
2) Su kuria x reikšme $f(x) = 5$? $f(x) = -5$? $f(x) = \frac{1}{5}$? $f(x) = -\frac{1}{5}$?

Reiškinys $f(x) = \sqrt{x}$ turi prasmę tik su neneigiamomis x reikšmėmis.

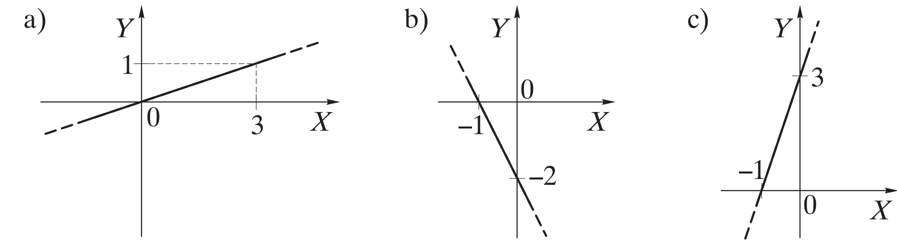
145. Nubraižykite $y = f(x)$ grafiką, kai:
a) $f(x) = -3x + 1$; b) $f(x) = \frac{x}{3} - 4$; c) $f(x) = \frac{4}{x}$;
d) $f(x) = -\frac{4}{x}$; e) $f(x) = 2x^2$; f) $f(x) = x^2 - 4$;
g) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$; h) $f(x) = -2\sqrt{x}$; i) $f(x) = \sqrt{x} + 2$.

146. Nustatykite k reikšmę, jei žinoma, kad taškas $M(1; 4)$ priklauso reiškinio $f(x)$ grafikui.
a) $f(x) = kx + 1$; b) $f(x) = kx^2$; c) $f(x) = \frac{k}{x}$; d) $f(x) = k\sqrt{x}$.

147. Braižydami kairiosios ir dešiniosios lygties pusių grafikus, nustatykite apytiksles lygties sprendinių reikšmes.
a) $3x + 1 = x^2$; b) $2x^2 = \frac{4}{x}$; c) $\frac{1}{2}x^3 = -\frac{3}{x}$; d) $\sqrt{x} = -4x + 3$.

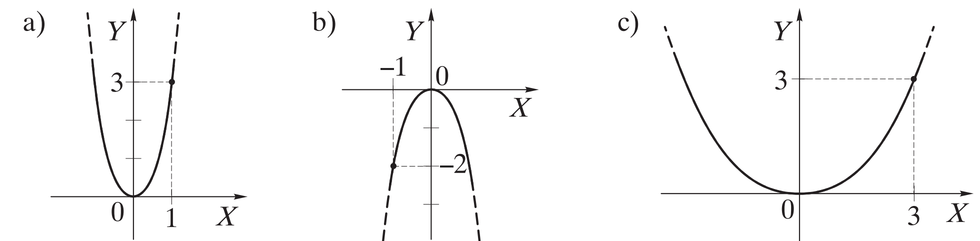
148. Nelygybę išspręskite grafiškai.
a) $-3x + 2 < 2x^2$; b) $x^3 < -x$; c) $x^2 \leqslant \frac{1}{x}$.

149. Paveikslėlyje nubraižytas reiškinio $f(x) = kx + b$ grafikas.

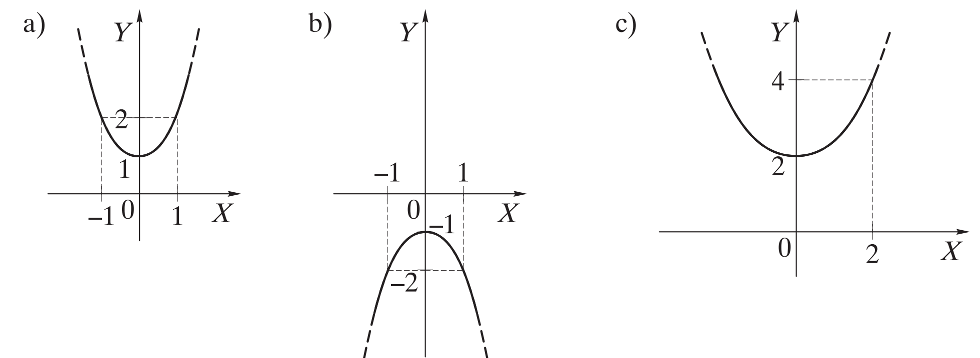


Apskaičiuokite k ir b reikšmes.

150. Užrašykite reiškinį $f(x) = ax^2$, kurio grafikas yra nubraižytoji parabolė.



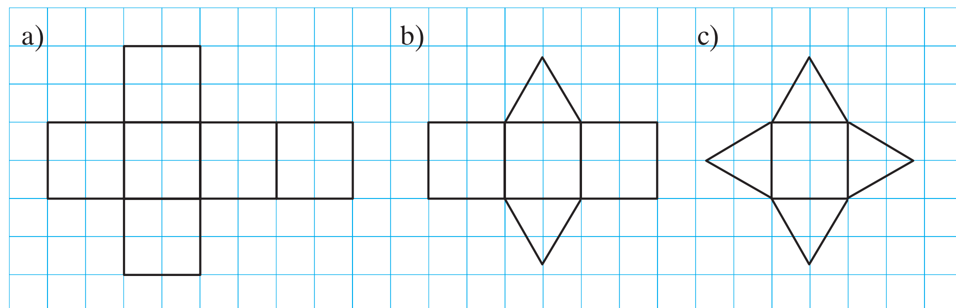
151. Užrašykite reiškinį $f(x) = ax^2 + c$, kurio grafikas pavaizduotas paveikslėlyje.



152. Apskaičiuokite reiškinių $4x + 1$ ir $-x + 4$ grafikų susikirtimo taško koordinates.

PRISIMENAME TAI, KO PRIREIKS KITAME SKYRIUJE

153. 1) Kokio erdvinio kūno išklotinė pavaizduota?



2) Apskaičiuokite to kūno paviršiaus plotą, jei jo visų briaunų ilgiai lygūs po 2 cm.

154. 1) Išreikškite nurodytais ploto matavimo vienetais.

a) $3\,m^2 = \ldots\,cm^2$; b) $5\,dm^2 = \ldots\,cm^2$;
c) $6{,}2\,cm^2 = \ldots\,mm^2$; d) $2000\,dm^2 = \ldots\,m^2$;
e) $350\,mm^2 = \ldots\,cm^2$; f) $7\,a = \ldots\,m^2$;
g) $4\,ha = \ldots\,a$; h) $10\,m^2 = \ldots\,a$.

$1\,cm^2 = 100\,mm^2$
$1\,m^2 = 10\,000\,cm^2$
$1\,a = 100\,m^2$
$1\,ha = 10\,000\,m^2$

2) Išreikškite nurodytais tūrio ir talpos matavimo vienetais.

a) $2\,dm^3 = \ldots\,cm^3$; b) $0{,}5\,dm^3 = \ldots\,\ell$;
c) $4{,}8\,cm^3 = \ldots\,mm^3$; d) $1000\,mm^3 = \ldots\,m\ell$;
e) $748\,cm^3 = \ldots\,m^3$; f) $3\,\ell = \ldots\,cm^3$.

$1\,dm^3 = 1000\,cm^3$
$1\,\ell = 1000\,cm^3$
$1\,m\ell = 1\,mm^3$

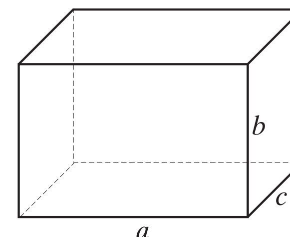
155. Kubo viso paviršiaus plotas lygus:
a) $150\,mm^2$; b) $60\,cm^2$; c) $2{,}4\,m^2$.
1) Kam lygus vienos kubo sienos plotas?
2) Kam lygus kubo briaunos ilgis?

Kubo visos sienos yra kvadratai.

156. Kubo formos akvariumo talpa — 27 litrai.
1) Užrašykite šio akvariumo matmenis centimetrais.
2) Kiek reikia kvadratinių centimetrų stiklo tokiam akvariumui pagaminti?

157. Jonas nupjovė stačiakampio gretasienio formos kaladėlės vieną kampą.
1) Kiek kampų dabar turi ta kaladėlė? Kiek ji turi briaunų? sienų?
2) Kiek sienų turi atpjautoji kaladėlės dalelė?

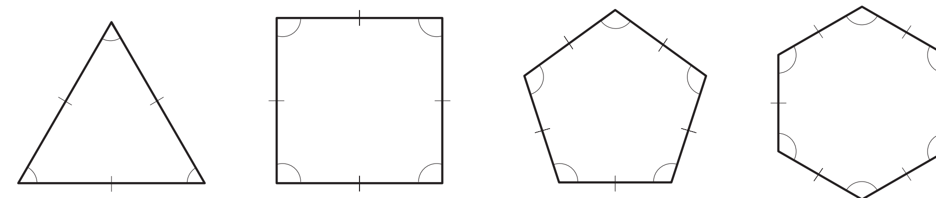
158. Stačiakampio gretasienio matmenys yra a cm × b cm × c cm. To gretasienio briaunų ilgiai lygūs sveikajam centimetrų skaičiui, tūris yra $V\,cm^3$, o viso paviršiaus plotas — $S\,cm^2$.



Stačiakampio gretasienio sienos yra stačiakampiai. Priešingos sienos yra lygios.

Apskaičiuokite stačiakampio gretasienio matmenis, jei jo:
a) $V = 12\,cm^3$; b) $S = 94\,cm^2$, $c = b + 1$ (cm), $a = c + 1$ (cm).

159. Paveikslėlyje pavaizduoti daugiãkampiai, kurių visos kraštinės yra lygios ir visi kampai yra lygūs.



Tokie daugiakampiai vadinami taisyklingaisiais

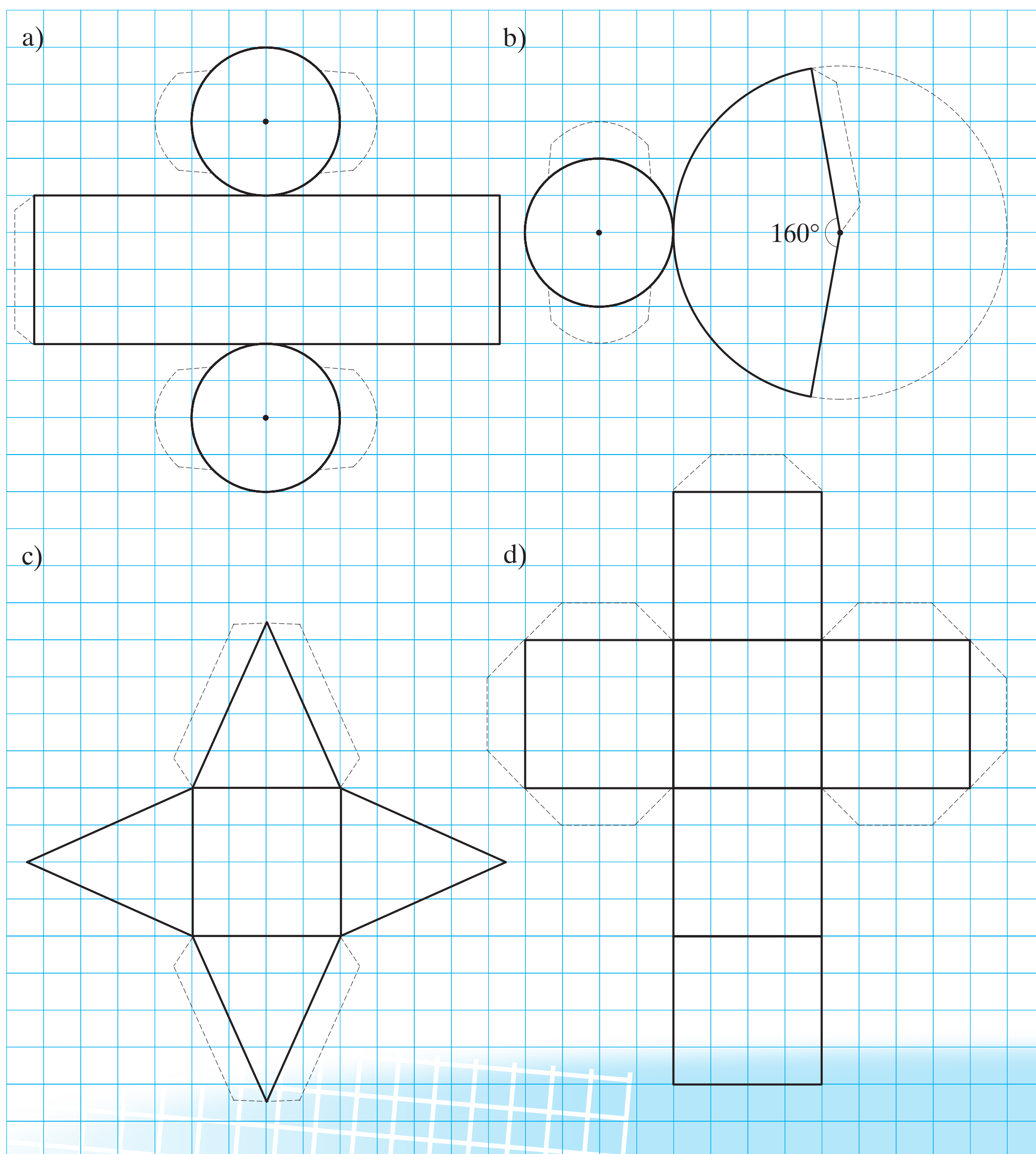
1) Taisyklingasis trikampis ir taisyklingasis keturkampis turi specialius pavadinimus. Kokius?
2) Apskaičiuokite kiekvieno pavaizduoto daugiakampio kampų dydžių sumą ir vieno kampo dydį.

n-kampį įstrižainėmis galima sudalyti į $(n-2)$ trikampius. Kadangi trikampio kampų dydžių suma lygi $180°$, tai n-kampio kampų dydžių suma lygi $180° \cdot (n-2)$.
Taisyklingojo n-kampio kampo dydis lygus $\frac{180° \cdot (n-2)}{n}$.

3) Apskaičiuokite plotus lygiakraščio trikampio, kvadrato ir taisyklingojo šešiakampio, jei kiekvieno jų kraštinės lygios:
a) 1 cm; b) 2 cm; c) 3 cm; d) a cm.
4) Sąsiuviniuose nusibraižykite taisyklingąjį trikampį, keturkampį ir šešiakampį bei pažymėkite jų centrus. Kur yra lygiakraščio trikampio centras? kvadrato centras?

Gaminame erdvinius kūnus

1) Ant atskirų popieriaus lapų nusibraižykite pavaizduotas erdvinių kūnų išklotines masteliu 4 : 1 (keturgubai didesnes negu vadovėlyje).



2) Iškirpkite tas išklotines. Iš jų sulankstykite ir suklijuokite erdvinius kūnus.
3) Kaip vadinami Jūsų pagaminti erdviniai kūnai?
4) Pabandykite apskaičiuoti tų kūnų paviršių plotus.
5) Pabandykite apskaičiuoti tų kūnų tūrius.

KŪGIO PAVIRŠIAUS PLOTAS IR TŪRIS

PIRAMIDĖS PAVIRŠIAUS PLOTAS IR TŪRIS

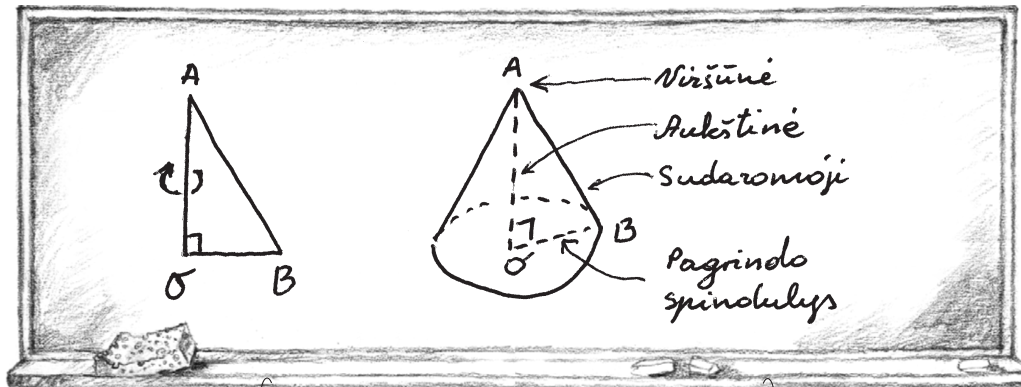
Šiame skyriuje spręsime uždavinius, susijusius su kūgiais ir piramidėmis.



- Nagrinėsime kūgio ir piramidės išklotines.
- Mokysimės skaičiuoti kūgio šoninio paviršiaus plotą ir tūrį.
- Prisiminsime, kokios piramidės vadinamos taisyklingosiomis.
- Mokysimės skaičiuoti taisyklingosios trikampės ir taisyklingosios keturkampės piramidės paviršiaus plotą ir tūrį.

7.1. KŪGIS

Prisiminkime:
Sukdami statųjį trikampį apie jo statinį, gauname erdvinį kūną, kuris vadinamas ***kūgiu***.



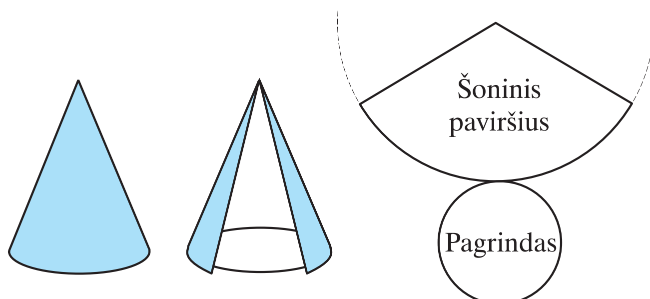
- Kūgio aukštinė yra atkarpa, jungianti kūgio viršūnę su pagrindo centru.
- Kūgio aukštinė yra statmena pagrindo spinduliui.
- Kūgio sudaromoji yra atkarpa, jungianti kūgio viršūnę su pagrindo apskritimo tašku.

Užduotis. Apskaičiuokite kūgio:
1) sudaromosios ilgį, jei jo aukštinė lygi 12 cm, o pagrindo spindulys — 5 cm;
2) aukštinės ilgį, jei jo sudaromoji lygi 10 cm, o pagrindo spindulys — 2 cm;
3) pagrindo spindulio ilgį, jei jo aukštinė lygi 5 dm, o sudaromoji — 15 dm.

Kūgio pagrindas yra skritulys.

O kaip atrodo išskleistas kūgio šoninis paviršius?

Kūgio išklotinę galima gauti iš kūgio formos dėžutės iškirpus pagrindą ir perpjovus dėžutės šoną sudaromosios linija.

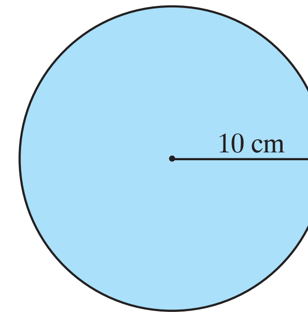


Šoninis paviršius

Pagrindas

Kūgio šoninis paviršius yra skritulio išpjova.

160. 1) Jonas iš popieriaus lapo iškirpo skritulį, kurio spindulys lygus 10 cm.

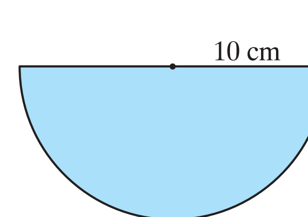


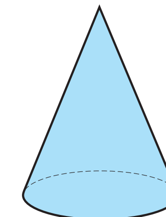
r

$C = 2\pi r$
$S = \pi r^2$

Apskaičiuokite:
a) skritulio ilgį; b) skritulio plotą.
Vietoj π imkite 3.

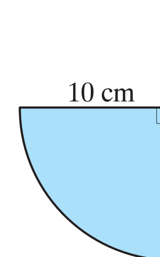
2) Tada Jonas skritulį per jo skersmenį perpjovė pusiau ir iš vieno pusskritulio pagamino kūgio formos kepurėlę.

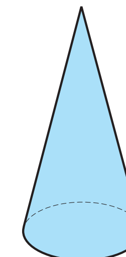




Koks Jono kūgio:
a) sudaromosios ilgis?
b) pagrindo ilgis?
c) pagrindo spindulio ilgis?
π reikšmę imkite lygią 3.

3) Nepanaudotą pusskritulį Jonas perkirpo į dvi lygias dalis. Iš vieno skritulio ketvirčio jis pagamino antrą kūgio formos kepurėlę.

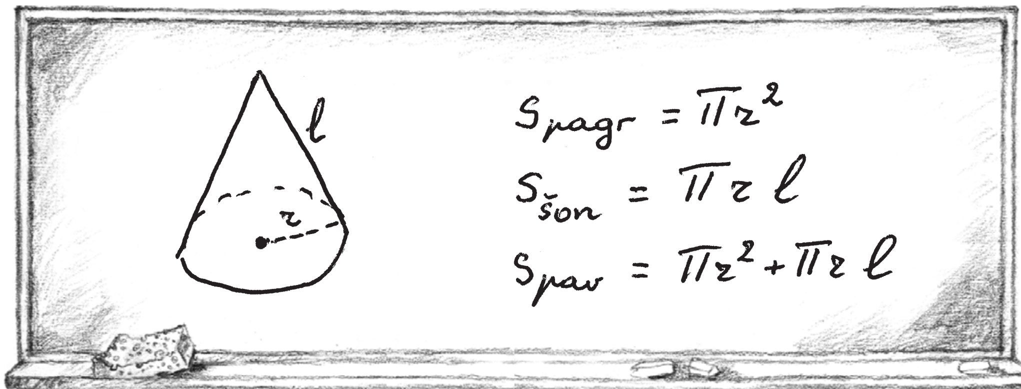




Atsakykite į 2) punkto klausimus a)–c).

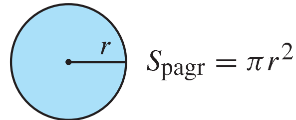
4) Kuri iš Jono kepurėlių yra aukštesnė? Kiek aukštesnė? (Atsakymą parašykite šimtųjų tikslumu.)

7.2. KŪGIO PAVIRŠIAUS PLOTAS



Užduotis. Kūgio pagrindo spindulys $r = 5$ cm, o sudaromoji $l = 8$ cm.
1) Apskaičiuokite kūgio pagrindo plotą S_{pagr}.

Kūgio, kurio pagrindo spindulys $r = 3$ cm, pagrindo plotas $S_{pagr} = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ (cm^2).



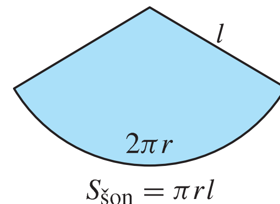
$S_{pagr} = \pi r^2$

2) Apskaičiuokite kūgio šoninio paviršiaus plotą $S_{šon}$.

Kūgio šoninis paviršius yra skritulio išpjova. Tos išpjovos spindulys lygus kūgio sudaromajai l, o išpjovos lankas lygus kūgio pagrindo apskritimo ilgiui $2\pi r$.

Išpjovos plotas yra lygus jos spindulio ir lanko ilgių sandaugos pusei:

$$S = \frac{1}{2} \cdot l \cdot 2\pi r = \pi r l.$$

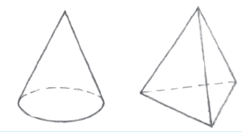


$S_{šon} = \pi r l$

Kūgio, kurio pagrindo spindulys $r = 3$ cm, o sudaromoji $l = 4$ cm, šoninio paviršiaus plotas $S_{šon} = \pi \cdot 3 \cdot 4 = 12\pi$ (cm^2).

3) Apskaičiuokite kūgio viso paviršiaus plotą S_{pav}.

Kūgio viso paviršiaus plotas: $S_{pav} = S_{pagr} + S_{šon} = \pi r^2 + \pi r l$.
Kai $r = 3$ cm, $l = 4$ cm, tai $S_{pav} = \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 4 = 9\pi + 12\pi = 21\pi$ (cm^2).



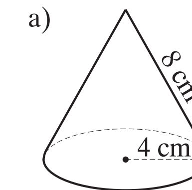
161. Apskaičiuokite kūgio viso paviršiaus plotą, kai žinomas jo pagrindo plotas ir šoninio paviršiaus plotas.

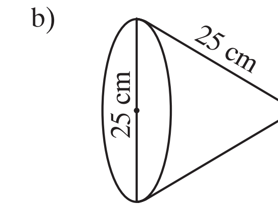
a) $S_{pagr} = 16\pi$ cm^2, $S_{šon} = 20\pi$ cm^2;

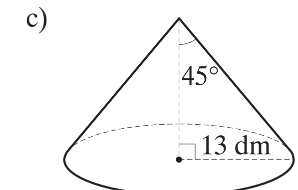
b) $S_{pagr} = 144\pi$ dm^2, $S_{šon} = 156\pi$ dm^2;

c) $S_{pagr} = 100\pi$ m^2, $S_{šon} = 625\pi$ m^2.

162. Paveikslėlyje pavaizduotas kūgis.

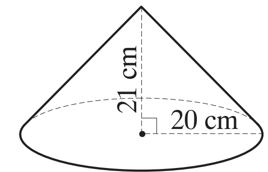
a) 

b) 

c) 

Apskaičiuokite kūgio:
1) pagrindo plotą; 2) šoninio paviršiaus plotą; 3) viso paviršiaus plotą.

163. Kūgio pagrindo spindulio ilgis yra 20 cm, o aukštinės ilgis yra 21 cm. Apskaičiuokite kūgio:
1) sudaromosios ilgį;
2) pagrindo plotą;
3) šoninio paviršiaus plotą;
4) viso paviršiaus plotą.

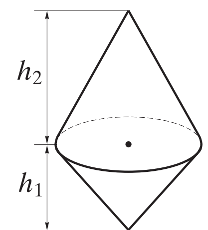


164. Kūgio formos dėžutės aukštis yra 35 cm, o sudaromosios ilgis yra 37 cm. Apskaičiuokite kūgio:
1) pagrindo spindulio ilgį; 2) pagrindo plotą;
3) šoninio paviršiaus plotą; 4) viso paviršiaus plotą.

165. Kūgio formos dėžutės aukštis yra 8 cm, o pagrindo plotas yra 225π cm^2. Apskaičiuokite kūgio:
1) pagrindo spindulio ilgį; 2) sudaromosios ilgį;
3) šoninio paviršiaus plotą; 4) viso paviršiaus plotą.

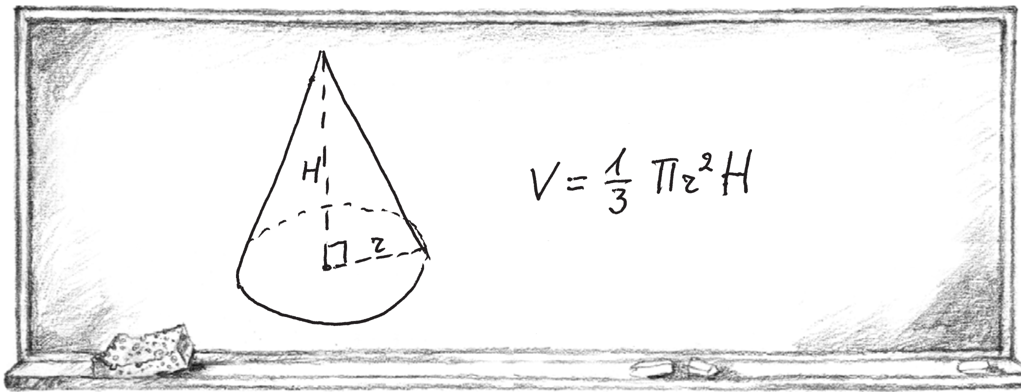
166. Devintokai papuošė klasę 14 cm aukščio „Žibintais“, kurie suklijuoti iš dviejų kūgių, turinčių bendrą pagrindą, kurių spinduliai lygūs 6 cm. Tų kūgių aukščių santykis yra 3 : 4.

$h_1 : h_2 = 3 : 4$



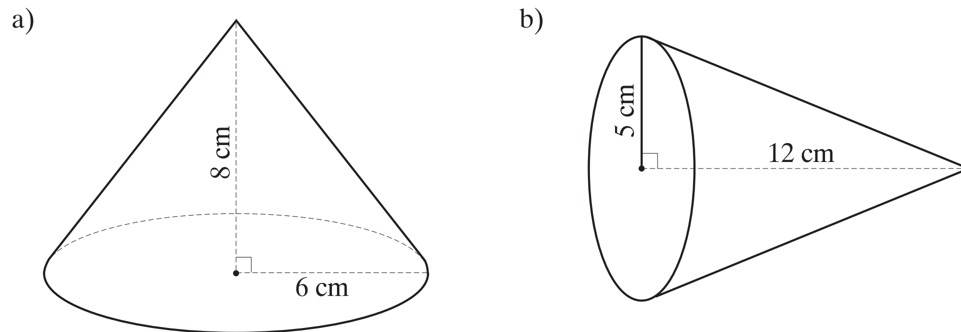
Apskaičiuokite „Žibinto“ šoninio paviršiaus plotą kvadratiniais centimetrais (vietoj π imkite 3,14).

7.3. KŪGIO TŪRIS



Užduotis. Brėžinyje pavaizduotas kūgis.

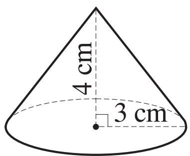
a) b)



1) Pasakykite, koks yra kūgio aukštinės ilgis ir pagrindo spindulio ilgis.
2) Apskaičiuokite kūgio pagrindo plotą.
3) Apskaičiuokite kūgio tūrį.

Kaip apskaičiuoti kūgio tūrį?



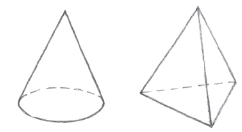


Kūgio tūris lygus pagrindo ploto ir aukštinės ilgio sandaugos trečdaliui:

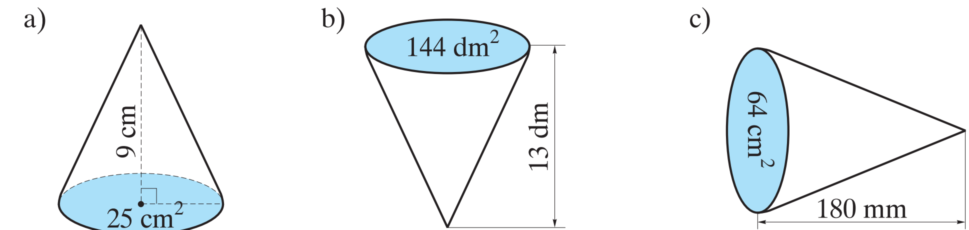
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{pagr} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot H.$$

Pavyzdžiui, kai $r = 3$ cm, $H = 4$ cm, tai $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$ (cm^3).

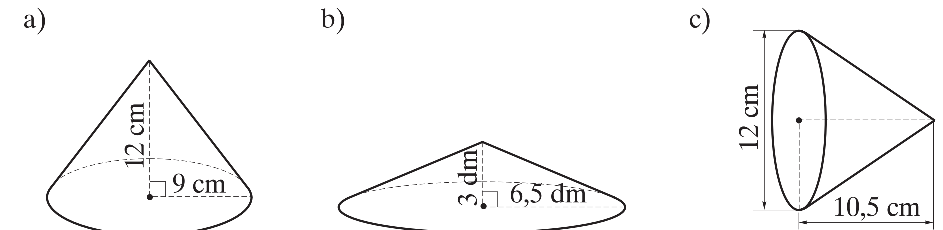




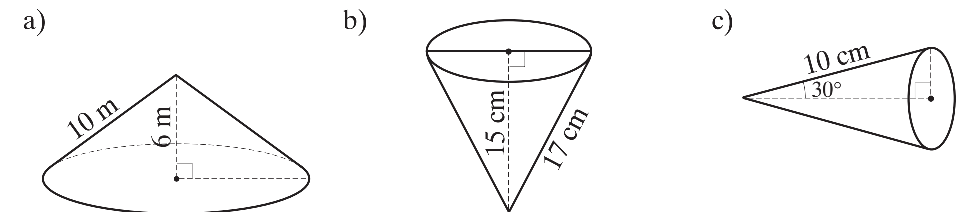
167. Apskaičiuokite kūgio formos dėžutės tūrį, kai žinomas dėžutės aukštis ir pagrindo plotas.



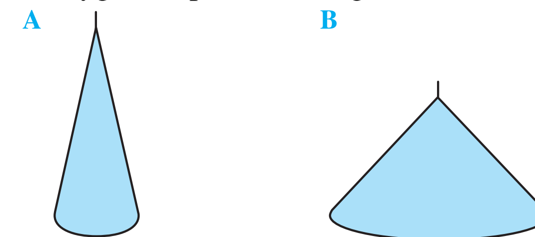
168. Apskaičiuokite pavaizduoto kūgio:
1) pagrindo plotą; 2) tūrį.



169. Apskaičiuokite pavaizduoto kūgio:
1) pagrindo spindulio ilgį; 2) pagrindo plotą; 3) tūrį.



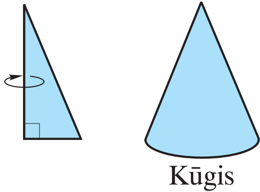
170. Jadvyga nusipirko dvi kūgio formos žvakes.

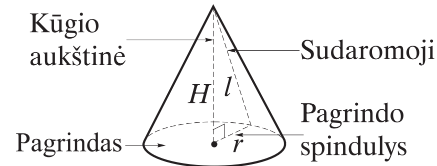


Žvakės **A** pagrindo spindulio ilgis yra 3 cm, o aukštis yra 20 cm. Žvakės **B** pagrindo spindulys yra dvigubai ilgesnis, o aukštis — dvigubai trumpesnis už žvakės **B**.
1) Apskaičiuokite kiekvienos žvakės tūrį.
2) Kiek gramų sveria kiekviena žvakė, jei 1 cm^3 vaško, iš kurio jos yra pagamintos, sveria 1,2 g? (π reikšmę imkite lygią 3,1.)

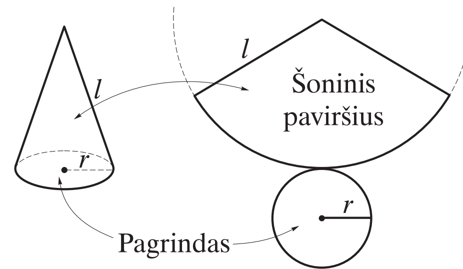
APIBENDRINAME

Sukdami statųjį trikampį apie bet kurį jo statinį, gauname kūgį.

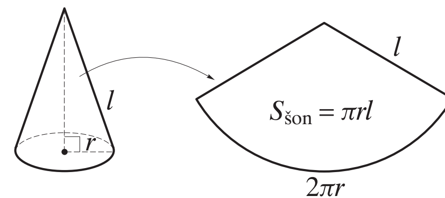




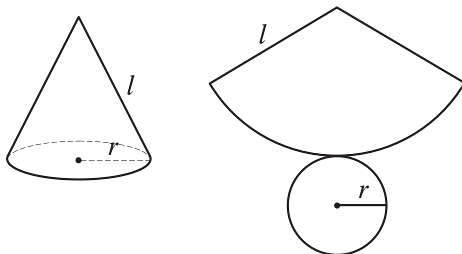
Išskleidę kūgio formos dėžutę, turėsime kūgio *išklotinę*.
Kūgio pagrindas — skritulys.
Kūgio šoninis paviršius — skritulio išpjova. Tos išpjovos spindulys lygus kūgio sudaromajai, o lanko ilgis lygus pagrindo apskritimo ilgiui.



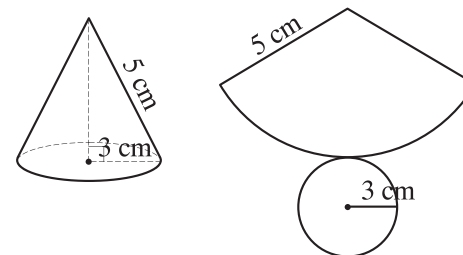
Kūgio *šoninio paviršiaus plotas* lygus pagrindo apskritimo ilgio ir sudaromosios ilgio sandaugos pusei:
$S_{šon} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot l = \pi r l.$



Kūgio *viso paviršiaus plotas* lygus pagrindo ir šoninio paviršiaus plotų sumai.

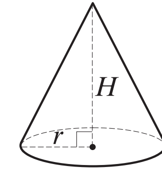


$S_{pav} = S_{pagr} + S_{šon} = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l)$

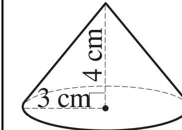


$S_{pagr} = \pi \cdot 3^2 = 9\pi\,(\text{cm}^2),$
$S_{šon} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi\,(\text{cm}^2),$
$S_{pav} = 9\pi + 15\pi = 24\pi\,(\text{cm}^2).$

Kūgio *tūris* lygus jo pagrindo ploto ir aukštinės ilgio sandaugos trečdaliui.



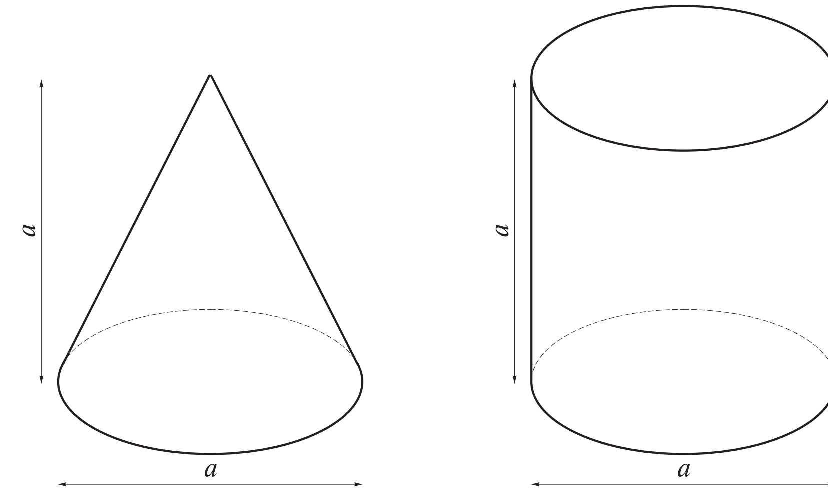
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$



$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi\,(\text{cm}^3).$

Kūgis ir ritinys

Paveikslėlyje pavaizduotas kūgis ir ritinys. Abiejų kūnų aukščiai yra vienodi, o pločiai lygūs aukščiams.



1 užduotis.

1) Užrašykite formules, kuriomis remiantis būtų galima apskaičiuoti tų kūnų tūrius, kai žinoma a reikšmė. (Vietoj π imkite 3.)
2) Kiek kartų ritinio tūris yra didesnis už kūgio tūrį?
3) Apskaičiuokite tų kūnų tūrius, kai $a = 1$ cm; $a = 2$ cm.

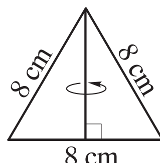
2 užduotis.

1) Užrašykite formules, kuriomis remiantis būtų galima apskaičiuoti tų kūnų paviršių plotus, kai žinoma a reikšmė. (Vietoj π imkite 3.)
2) Apskaičiuokite tų kūnų paviršių plotus, kai $a = 1$ cm; $a = 2$ cm.

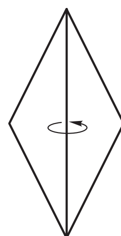
SPRENDŽIAME

171. Stačiojo trikampio statinių ilgiai yra 3 cm ir 4 cm. Kurio kūgio tūris bus didesnis — kai trikampį suksime apie ilgesnįjį statinį ar kai apie trumpesnįjį?

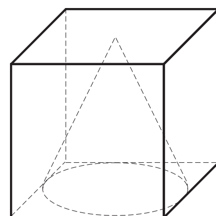
172. Lygiakraščio trikampio kraštinės ilgis yra 8 cm.
a) Kokį gausime erdvinį kūną, kai šį trikampį suksime apie aukštinę?
b) Apskaičiuokite gauto erdvinio kūno:
1) pagrindo spindulio ilgį; 2) aukštinės ilgį;
3) paviršiaus plotą; 4) tūrį.



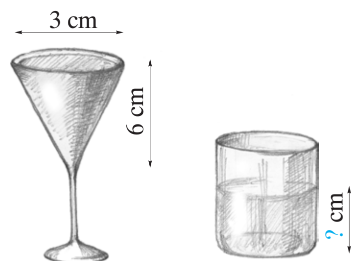
173. Rombas, kurio smailusis kampas yra 60°, o kraštinės ilgis yra 10 cm, sukamas apie ilgesniąją įstrižainę.
a) Iš kokių dviejų vienodų kūnų sudarytas gautasis sukinys?
b) Apskaičiuokite gautojo sukinio:
1) plotį; 2) aukštį; 3) paviršiaus plotą; 4) tūrį.

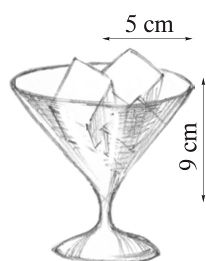


174. Kūgio formos žvakė įdėta į kubinę dėžutę taip, kaip parodyta paveikslėlyje. Dėžutės tūris yra $1728\,\text{cm}^3$.
Apskaičiuokite žvakės:
1) aukštį; 2) pagrindo spindulio ilgį;
3) sudaromosios ilgį;
4) paviršiaus plotą; 5) tūrį.



175. 1) Kūgio formos taurė sklidina vandens. Mikas visą taurės vandenį perpylė į ritinio formos stiklinę. Stiklinės aukštis lygus taurės kūgiškosios dalies aukščiui, o pagrindo spindulys lygus kūgio pagrindo spinduliui. Koks vandens aukštis stiklinėje? (Žr. pav. kairėje.)

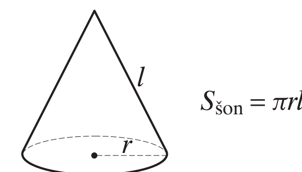




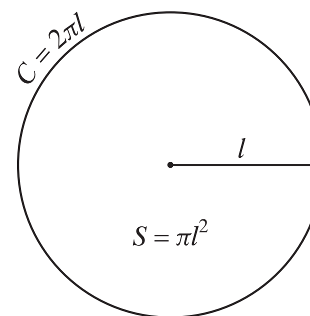
2) Į kūgio formos taurę įdėti trys vienodi kubo formos ledo gabaliukai. Ar tilps toje taurėje vanduo, susidaręs ištirpus ledo gabaliukams, jei ledo gabaliuko briauna lygi 2 cm, taurės viršaus apskritimo spindulys lygus 5 cm, o taurės aukštis — 9 cm? (Žr. pav. dešinėje.)

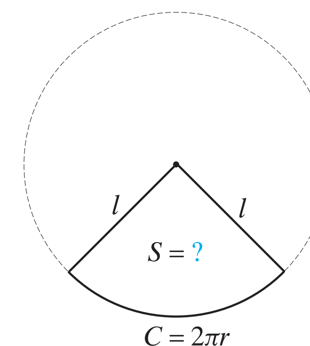
Kūgio šoninio paviršiaus ploto formulė

Įrodykime, kad kūgio, kurio pagrindo spindulys yra r, o sudaromoji — l, šoninio paviršiaus plotas $S_{\text{šon}} = \pi r l$.



1) Kūgio šoninis paviršius yra išpjova skritulio, kurio spindulys lygus l.
To *skritulio* ilgis $C_{\bigcirc} = 2\pi l$, o plotas $S_{\bigcirc} = \pi l^2$ (žr. kairįjį pav.). *Išpjovos* spindulys lygus l, o lanko ilgis lygus pagrindo apskritimo ilgiui, t. y. $C_{\triangle} = 2\pi r$.





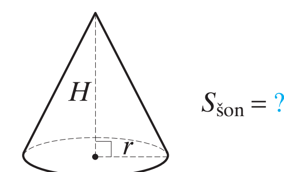
2) Akivaizdu, kad skritulio plotas $S_{\bigcirc}$ ir to skritulio išpjovos plotas $S_{\triangle}$ bei skritulio ilgis $C_{\bigcirc}$ ir tos išpjovos lanko ilgis $C_{\triangle}$ yra proporcingi dydžiai, t. y.: *Kiek kartų skritulio ilgis yra didesnis už išpjovos lanko ilgį, tiek pat kartų skritulio plotas yra didesnis už išpjovos plotą*:

$$\frac{S_{\bigcirc}}{S_{\triangle}} = \frac{C_{\bigcirc}}{C_{\triangle}}.$$

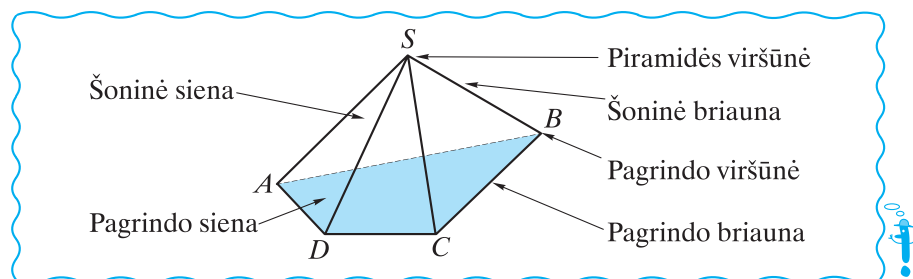
3) Iš šios proporcijos randame išpjovos plotą $S_{\triangle}$:

$$S_{\triangle} = \frac{S_{\bigcirc} \cdot C_{\triangle}}{C_{\bigcirc}} = \frac{\pi l^2 \cdot 2\pi r}{2\pi l} = \pi r l.$$

Užduotis. Užrašykite formulę, kuria remiantis būtų galima apskaičiuoti kūgio šoninio paviršiaus plotą, kai žinomas kūgio pagrindo spindulys r ir kūgio aukštinė H.



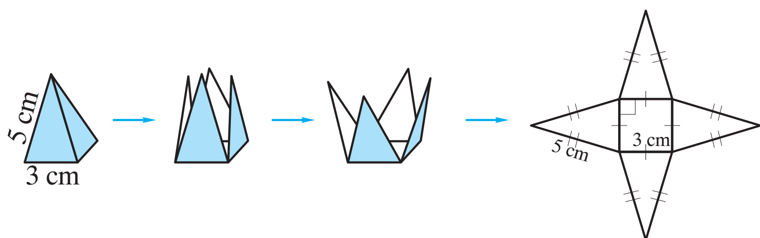
7.4. TAISYKLINGOSIOS PIRAMIDĖS



1 užduotis.

1) Prisiminkite ir pasakykite, koks erdvinis kūnas yra vadinamas piramide.
2) Išvardykite viršuje pavaizduotos keturkampės piramidės $SABCD$:
   a) viršūnes; b) briaunas; c) sienas.
3) Nubraižykite: a) trikampę piramidę; b) keturkampę piramidę.

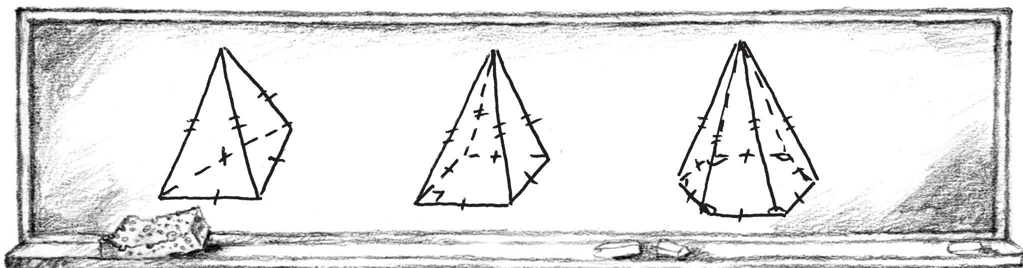
Piramidės išklotinę galima gauti piramidės formos dėžutę sukarpius, pavyzdžiui, per šonines briaunas. Paveikslėlyje pavaizduota išklota piramidė, kurios pagrindas yra kvadratas, o šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai.

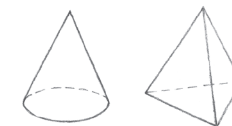


Piramidė, kurios pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis (lygiakraštis trikampis, kvadratas, taisyklingasis penkiakampis, ...), o šoninės sienos — lygūs lygiašoniai trikampiai, vadinama ***taisyklingąja piramide***.

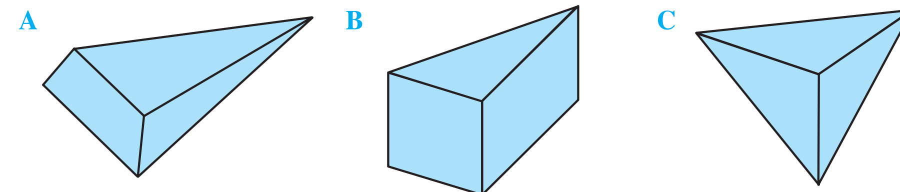
2 užduotis.

1) Kaip pavadintumėte lentoje pavaizduotas taisyklingąsias piramides?
2) Koks daugiakampis yra kiekvienos pavaizduotos piramidės pagrindas?



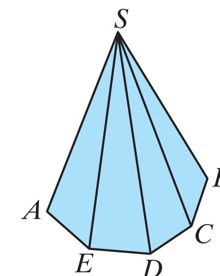


176. Iš pavaizduotų erdvinių kūnų tik vienas *nėra* piramidė. Kuris?



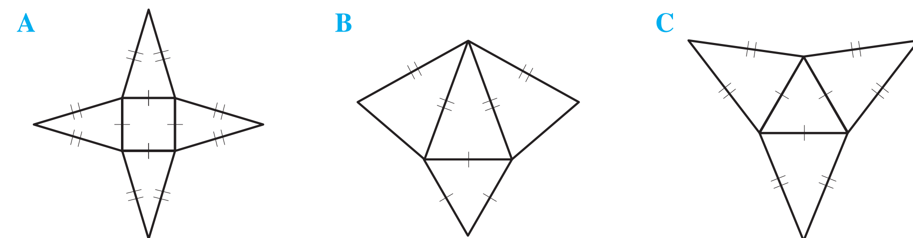
177. Paveikslėlyje pavaizduota piramidė $SABCDE$.

1) Išvardykite piramidės:
   a) šonines briaunas; b) pagrindo briaunas;
   c) briaunas, išeinančias iš viršūnės A.
2) Išvardykite piramidės:
   a) šonines sienas;
   b) sienas, turinčias briauną SA;
   c) sienas, kurioms priklauso viršūnė B.

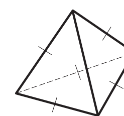


178. Kiek viršūnių, kiek briaunų ir kiek sienų turi piramidė, jei ji yra:
a) trikampė? b) keturkampė? c) penkiakampė? d) šešiakampė?

179. Paveikslėlyje pavaizduotos trijų taisyklingųjų piramidžių išklotinės.



1) Kaip vadinama kiekviena ta piramidė?
2) Nubraižykite išklotinę taisyklingosios trikampės piramidės, kurios visos briaunos yra lygios.



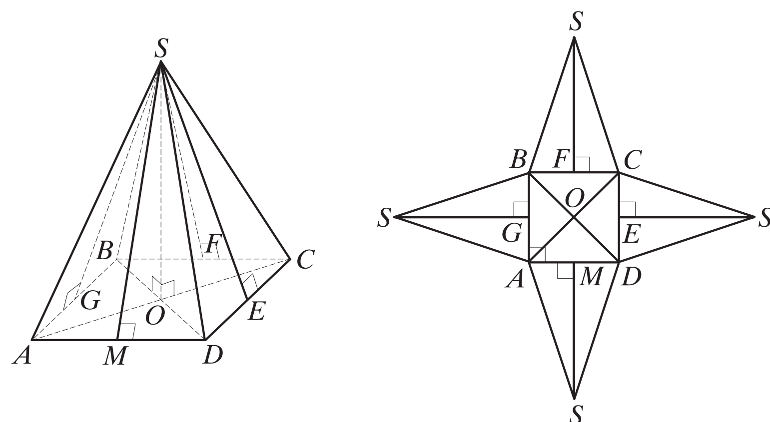
Tokia trikampė piramidė vadinama tetraedrù.

180. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninės sienos yra lygiakraščiai trikampiai, kurių kraštinės lygios 8 dm. Apskaičiuokite piramidės:

1) visų briaunų ilgių sumą;
2) pagrindo plotą;
3) šoninės sienos aukštinės ilgį;
4) šoninės sienos plotą.

7.5. TAISYKLINGŲJŲ PIRAMIDŽIŲ AUKŠTINĖS

Paveikslėlyje pavaizduota taisyklingoji keturkampė piramidė ir jos išklotinė. Nubrėžta atkarpa, jungianti piramidės viršūnę su pagrindo centru, bei nubrėžtos šoninių sienų aukštinės.



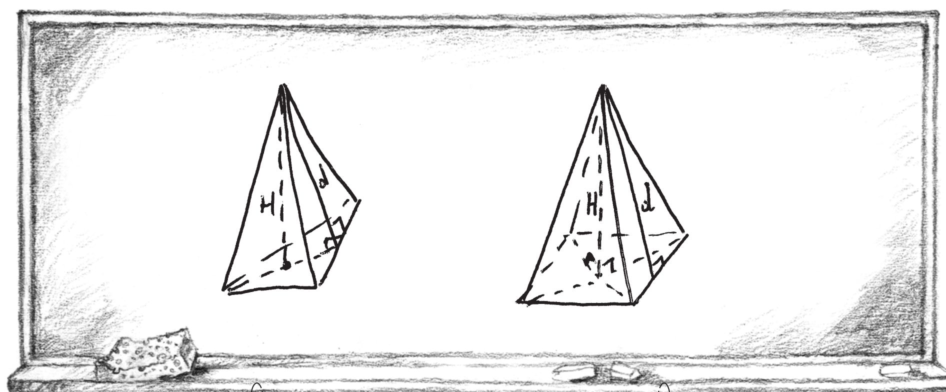
Užduotis.

1) Įsitikinkite, kad šoninių sienų aukštinės yra lygios, t. y.: $SE = SF = SG = SM$.

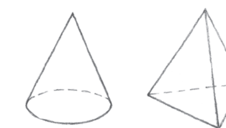
Atkarpa, jungianti taisyklingosios piramidės viršūnę su jos pagrindo centru, vadinama ***piramidės aukštinė***.

Taisyklingosios piramidės šoninės sienos aukštinė vadinama ***piramidės apotemà***.

2) Įsitikinkite, kad SO yra statmena atkarpai BD (nagrinėkite $\triangle SBD$) ir yra statmena atkarpai AC.

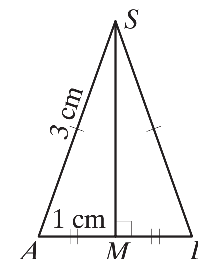


Piramidės aukštinė žymima raide H, o apotema — raide d. Piramidės aukštinė yra statmena bet kuriai pagrindo tiesei.



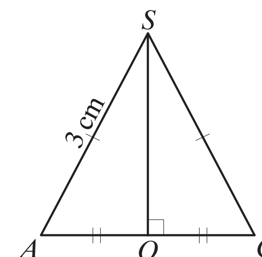
181. $SABCD$ — taisyklingoji keturkampė piramidė (žr. pav. 96 puslapio viršuje). Piramidės pagrindo briauna $AD = 2$ cm, o šoninė briauna $AS = 3$ cm.

1) Apskaičiuokite piramidės apotemos ilgį.



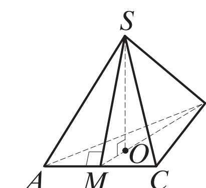
$\triangle ASD$ — lygiašonis, $AS = DS = 3$ cm,
$AM = MD = 1$ cm — paaiškinkite kodėl,
$SM^2 = AS^2 - AM^2$,
....

2) Apskaičiuokite piramidės aukštinės ilgį.

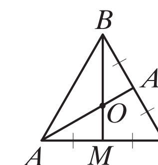


$\triangle AOS$ — status,
$AO = \frac{AC}{2}$ — paaiškinkite kodėl,
$SO^2 = AS^2 - AO^2$,
....

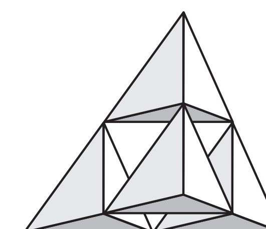
182. $SABC$ — taisyklingoji trikampė piramidė, kurios visos briaunos yra lygios 2 cm. Apskaičiuokite piramidės:
1) apotemos ilgį;
2) aukštinės ilgį.



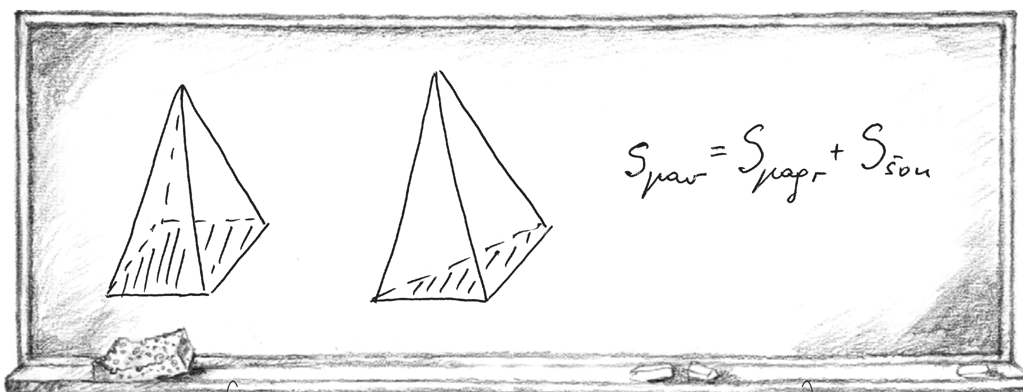
Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinės SO taškas O yra pagrindo — trikampio ABC — pusiaukraštinių susikirtimo taškas (lygiakraščio trikampio centras). Prisiminkite trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taško savybę: $BO = \frac{2}{3}BM$.



183. Paveikslėlyje pavaizduotas statinys, kuris yra padarytas iš keturių vienodų taisyklingųjų trikampių piramidžių (tetraedrų), kurių aukščiai lygūs 10 cm. Gautasis statinys taip pat yra tetraedras. Koks stātinio aukštis centimetrais?

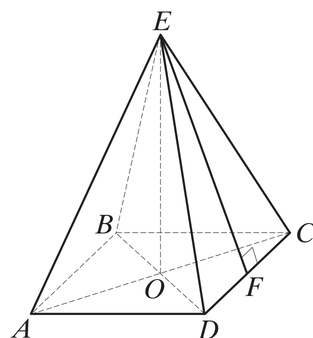


7.6. PIRAMIDĖS PAVIRŠIAUS PLOTAS



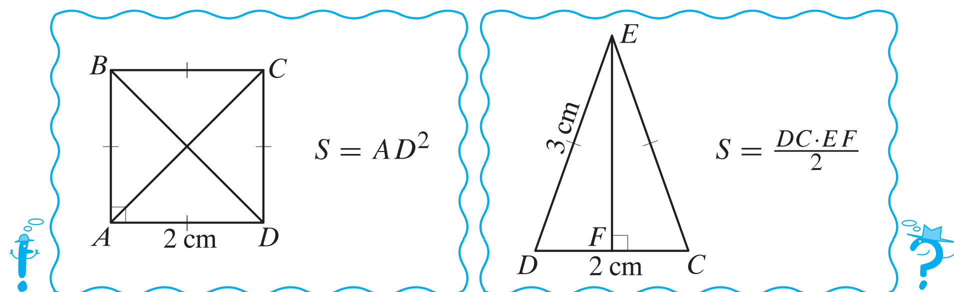
Piramidės viso paviršiaus plotas lygus pagrindo ir šoninių sienų plotų sumai.

Užduotis. Paveikslėlyje pavaizduota taisyklingoji keturkampė piramidė.

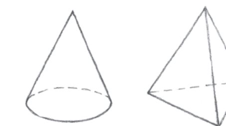


$AB = BC = CD = DA = 2\,\text{cm}$,
$AE = BE = CE = DE = 3\,\text{cm}$.

1) Apskaičiuokite piramidės pagrindo plotą S_{pagr}.
2) Apskaičiuokite piramidės vienos šoninės sienos plotą $S_{\triangle}$.



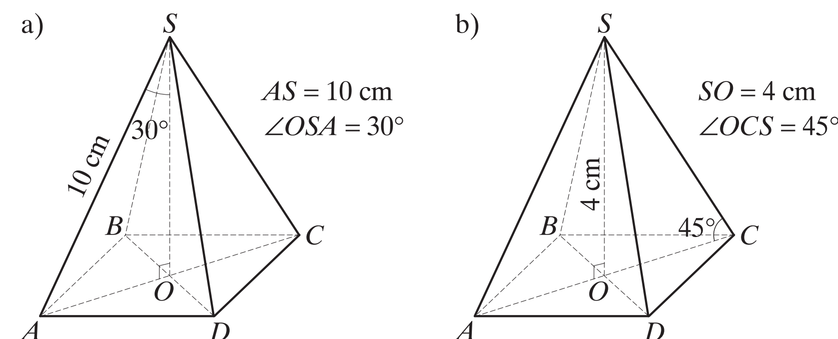
3) Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą $S_{\text{šon}}$.
4) Apskaičiuokite piramidės viso paviršiaus plotą S_{pav}.



184. Apskaičiuokite taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ viso paviršiaus plotą, jei:
a) $AB = BC = CD = DA = SA = SB = SC = SD = 10\,\text{mm}$;
b) $AB = BC = CD = DA = 2\,\text{mm}$, $SA = SB = SC = SD = 3\,\text{mm}$.

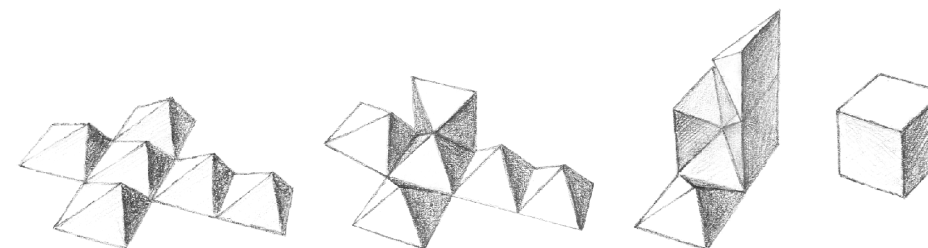
185. Apskaičiuokite taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ viso paviršiaus plotą, jei:
a) $AB = BC = AC = SA = SB = SC = 10\,\text{cm}$;
b) $AB = BC = AC = 2\,\text{cm}$, $SA = SB = SC = 3\,\text{cm}$.

186. Naudodamiesi paveikslėlio duomenimis, apskaičiuokite taisyklingosios piramidės viso paviršiaus plotą.



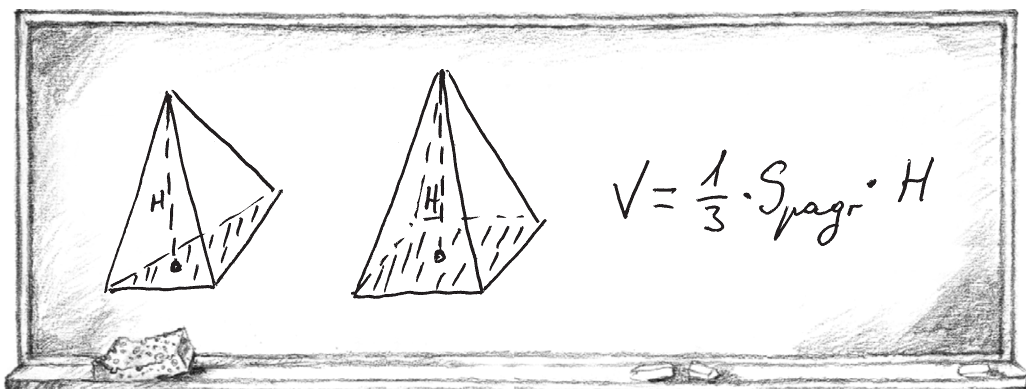
187. Taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ pagrindo plotas lygus $25\,\text{cm}^2$, o šoninės sienos SAB plotas lygus $15\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite:
1) pagrindo briaunos ilgį; 2) pagrindo įstrižainės ilgį;
3) apotemos ilgį; 4) šoninės briaunos ilgį; 5) aukštinės ilgį.

188. Rokas iš popieriaus pagamino šešias vienodas taisyklingąsias keturkampes piramides, kurių aukštinės yra dvigubai trumpesnės už pagrindo briaunas. Tas šešias piramides Rokas suklijavo kaip paveikslėliuose ir gavo kubą.

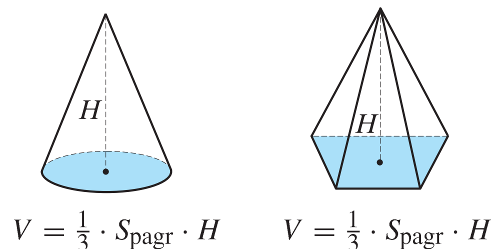


1) Koks piramidės pagrindo plotas, jei kubo viso paviršiaus plotas lygus $864\,\text{cm}^2$?
2) Koks piramidės aukštinės ilgis?
3) Kokio ilgio piramidės šoninė briauna?

7.7. PIRAMIDĖS TŪRIS

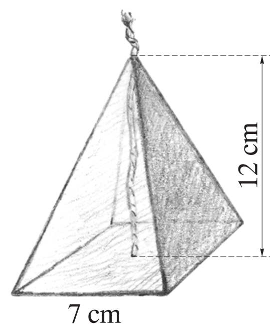


Kūgio ir piramidės tūrių formulės yra vienodos!

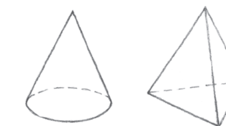


$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{pagr}} \cdot H$ $\quad$ $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{pagr}} \cdot H$

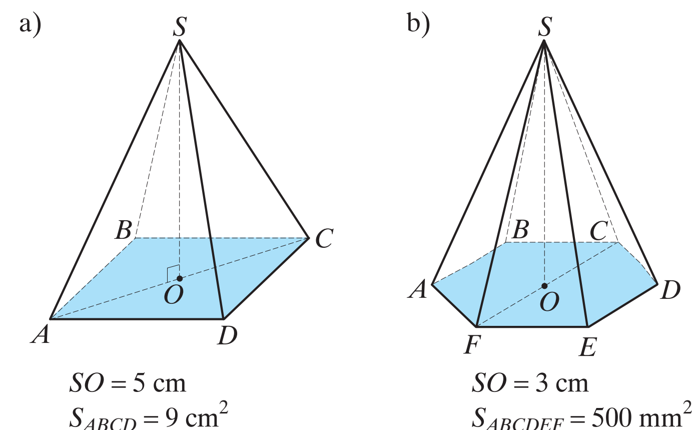
Užduotis. Paveikslėlyje pavaizduota dekoratyvinė žvakė, kuri yra taisyklingosios keturkampės piramidės formos.



1) Naudodamiesi paveikslėlio duomenimis, pasakykite, koks žvakės pagrindo briaunos ilgis. Apskaičiuokite pagrindo plotą (cm^2).
2) Naudodamiesi paveikslėlio duomenimis, pasakykite, koks žvakės aukštis. Apskaičiuokite žvakės tūrį (cm^3).
3) Kiek sveria žvakė, jei ji pagaminta iš vaško, kurio 1 cm^3 sveria 2 gramus?

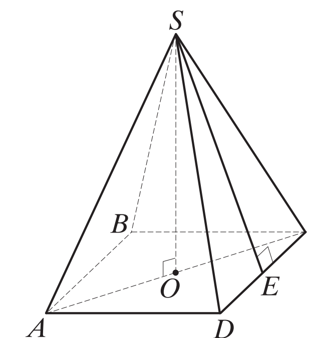


189. Apskaičiuokite taisyklingosios piramidės tūrį, jei žinomas jos pagrindo plotas ir aukštinės ilgis.

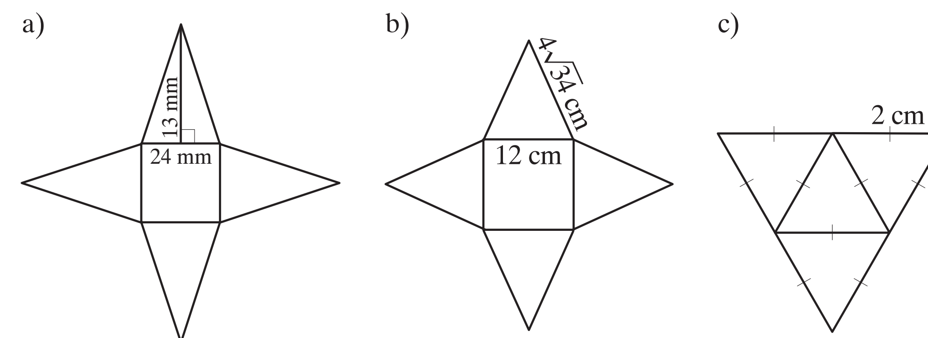


190. Paveikslėlyje pavaizduota taisyklingoji keturkampė piramidė, kurios tūris $V = 3840\,\text{cm}^3$, o aukštinė $SO = 2\,\text{dm}$.

Apskaičiuokite piramidės:
1) pagrindo $ABCD$ plotą;
2) pagrindo briaunos AB ilgį;
3) pagrindo įstrižainės AC ilgį;
4) šoninės briaunos AS ilgį;
5) apotemos SE ilgį.

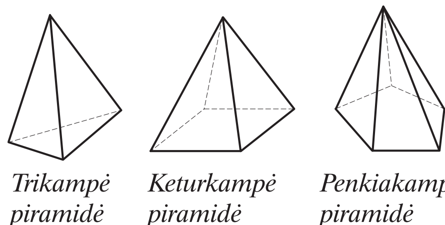


191. Paveikslėlyje pavaizduota taisyklingosios piramidės išklotinė. Apskaičiuokite tos piramidės tūrį.



APIBENDRINAME

Erdvinis kūnas, kurio viena siena (pagrindas) yra koks nors daugiakampis (trikampis, keturkampis, penkiakampis, ...), o kitos sienos (šoninės sienos) yra trikampiai, turintys bendrą viršūnę, vadinamas ***piramidė***.


Trikampė piramidė *Keturkampė piramidė* *Penkiakampė piramidė*

Piramidės pavadinimas priklauso nuo to, koks daugiakampis yra jos pagrindas.

Piramidė, kurios pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis (lygiakraštis trikampis, kvadratas, taisyklingasis penkiakampis, ...), o šoninės sienos yra lygūs lygiašoniai trikampiai, vadinama ***taisyklìngaja piramidè***.

Atkarpa, jungianti taisyklingosios piramidės viršūnę su jos pagrindo centru, vadinama piramìdės ***aukštinė***. Ji žymima raide H.

Piramidės aukštinė yra statmena visoms pagrindo tiesėms.

Taisyklingosios piramidės šoninės sienos aukštinė vadinama piramidės ***apotemà***. Ji žymima raide d.

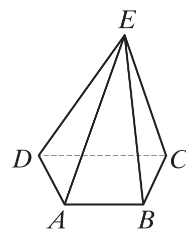
Piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus šoninių sienų plotų sumai. Šoninio paviršiaus plotas žymimas $S_{šon}$.

Piramidės viso paviršiaus plotas lygus pagrindo (S_{pagr}) ir šoninio paviršiaus ($S_{šon}$) plotų sumai:

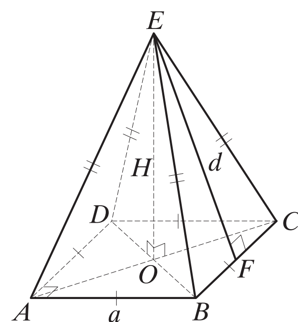
$S_{pav} = S_{pagr} + S_{šon}$.

Piramidės tūris lygus pagrindo ploto ir aukštinės ilgio sandaugos trečdaliui:

$V = \frac{1}{3} \cdot S_{pagr} \cdot H$.



$EABCD$ — keturkampė piramidė:
E — piramidės viršūnė,
$ABCD$ — pagrindas,
AEB, BEC, CED, AED — šoninės sienos.



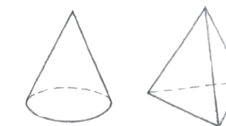
$EABCD$ — taisyklingoji keturkampė piramidė:
$ABCD$ — kvadratas,
$\triangle AEB = \triangle BEC = \triangle CED = \triangle AED$ — lygūs lygiašoniai trikampiai ($AE = BE = CE = DE$),
$EO = H$ — aukštinė,
$EF = d$ — apotema.

$S_{pagr} = a^2$

$S_{šon} = 4 \cdot \frac{a \cdot d}{2} = 2ad$

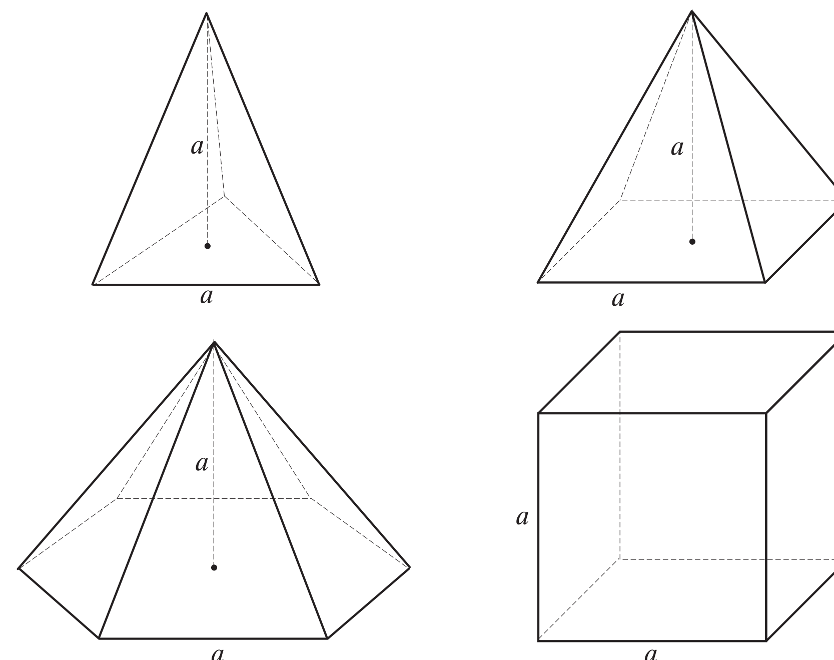
$S_{pav} = a^2 + 2ad$

$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$



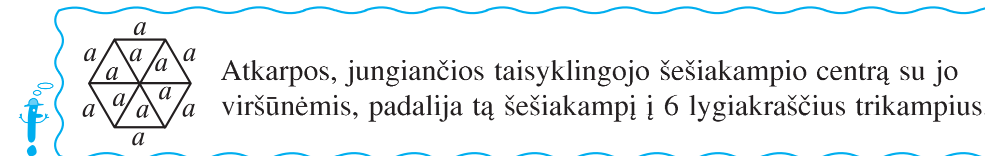
Piramidė ir kubas

Paveikslėlyje pavaizduotos trys taisyklingosios piramidės ir kubas.
Visų tų keturių kūnų pagrindų ir briaunos yra lygios a, ir aukščiai yra lygūs a.



1 užduotis.

1) Užrašykite formules, kuriomis remiantis būtų galima apskaičiuoti tų kūnų tūrius, kai žinoma a reikšmė.



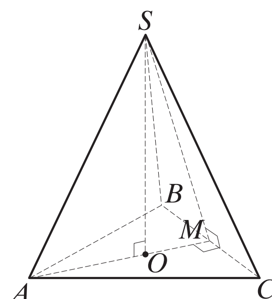
2) Apskaičiuokite tų kūnų tūrius, kai $a = 1$ cm.
3) Kiek kartų taisyklingosios keturkampės piramidės tūris yra mažesnis už kubo tūrį?
4) Kiek kartų taisyklingosios šešiakampės piramidės tūris yra didesnis už taisyklingosios trikampės piramidės tūrį?

2 užduotis.

1) Užrašykite formules, kuriomis remiantis būtų galima apskaičiuoti tų kūnų paviršių plotus, kai žinoma a reikšmė.
2) Apskaičiuokite tų kūnų paviršių plotus, kai $a = 1$ cm. Surašykite tas reikšmes didėjančia tvarka.

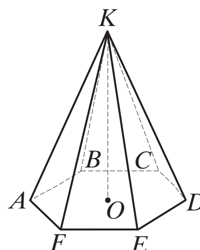
SPRENDŽIAME

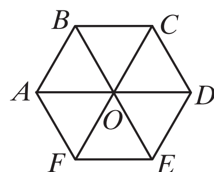
192. Paveikslėlyje pavaizduota taisyklingoji trikampė piramidė $SABC$. Tos piramidės pagrindo briauna $AB = 6$ cm, šoninės sienos aukštinė (apotema) $SM = \sqrt{15}$ cm. Apskaičiuokite piramidės:
1) pagrindo aukštinę AM;
2) aukštinę SO;
3) pagrindo plotą;
4) šoninio paviršiaus plotą;
5) viso paviršiaus plotą;
6) tūrį.



193. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninio paviršiaus plotas yra $S_{šon}$, viso paviršiaus plotas yra S_{pav}. Apskaičiuokite piramidės aukštinę H ir tūrį V, kai:
a) $S_{šon} = 14{,}76\ \text{cm}^2$, $S_{pav} = 18\ \text{cm}^2$;
b) $S_{šon} = 50\ \text{mm}^2$, $S_{pav} = 60\ \text{mm}^2$;
c) $S_{šon} = 6\sqrt{30}\ \text{cm}^2$, $S_{pav} = (6\sqrt{30} + 9)\ \text{cm}^2$.

194. Paveikslėlyje pavaizduota taisyklingoji šešiakampė piramidė $KABCDEF$. Tos piramidės pagrindo briauna $AB = 2\sqrt{3}$ cm, aukštinė $KO = 4$ cm.
Apskaičiuokite piramidės:
1) pagrindo plotą;

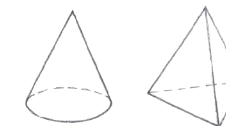




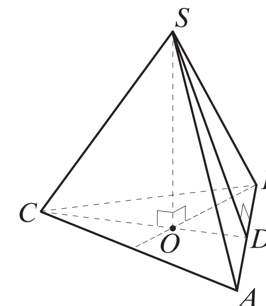
Taisyklingąjį šešiakampį jo ilgiausios įstrižainės sudalija į 6 taisyklinguosius trikampius.

2) šoninės briaunos ilgį; 3) apotemos ilgį;
4) šoninės sienos KBC plotą; 5) viso paviršiaus plotą; 6) tūrį.

195. Taisyklingosios šešiakampės piramidės pagrindo kraštinė yra a, o aukštinė — H. Apskaičiuokite šios piramidės šoninio paviršiaus plotą, viso paviršiaus plotą ir tūrį, jei:
a) $a = 6$ cm, $H = \sqrt{21}$ cm;
b) $a = 1{,}2$ dm, $H = 4{,}8$ dm;
c) $a = 8$ dm, $H = 14$ dm.



196. $SABC$ — taisyklingoji trikampė piramidė.

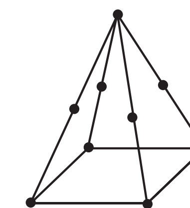


Užpildykite lentelę.

	AB	CD	CO	OD	SO	SD	V	$S_{šon}$	S_{pav}
a)		9			6				
b)			6		8				
c)		$6\sqrt{3}$					8		
d)				$\sqrt{3}$		$3\sqrt{3}$			
e)	8				$2\sqrt{7}$				

197. Konstruktoriaus rinkinyje yra 60 vienodo ilgio pagaliukų ir 50 plastilino rutuliukų. Motiejus iš tų detalių konstravo taisyklingąsias piramides:
- pirmiausia jis sukonstravo taisyklingąją trikampę piramidę;
- tada jis sukonstravo taisyklingąją keturkampę piramidę
- ir taip konstravo tol, kol baigėsi detalės.

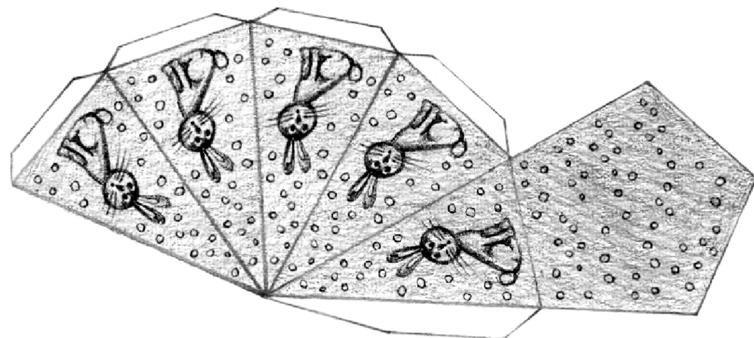
Konstruojamų piramidžių pagrindų briaunoms Motiejus ėmė po 1 pagaliuką, o šoninėms briaunoms — po 2 pagaliukus.
Paveikslėlyje dešinėje parodyta Motiejaus sukonstruota keturkampė piramidė.



1) Kiek Motiejui prireikė pagaliukų ir kiek — plastilino rutuliukų:
   a) pirmajai piramidei? b) paskutinei piramidei?
2) Kiek liko nepanaudotų:
   a) pagaliukų? b) rutuliukų?
3) Kiek pagaliukų ir kiek rutuliukų reikėtų tokiai 100-kampei piramidei pagaminti?

198. Koks taisyklingosios keturkampės piramidės tūris, jei jos:
a) pagrindo briauna lygi a (cm), o aukštinė lygi $2a$ (cm)?
b) pagrindo briauna lygi $a + 2$ (cm), o aukštinė lygi $3a$ (cm)?

199. Paveikslėlyje pavaizduota taisyklingosios piramidės formos dėžutės išklotinė.

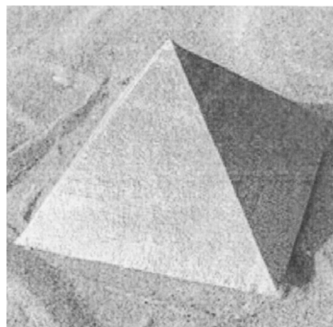


1) Keliakampę taisyklingąją piramidę gausime, iš išklotinės sulankstę tą dėžutę?
2) Koks dėžutės pagrindo plotas ir koks vienos šoninės sienos plotas, jei pagrindo plotas yra 3 kartus mažesnis už šoninio paviršiaus plotą, o viso dėžutės paviršiaus plotas lygus $100\,\text{cm}^2$?

200. Cheopso piramidė yra taisyklingosios keturkampės piramidės formos (žr. pav. kairėje). Ji užima 40 000 kvadratinių metrų plotą ir yra 147 metrų aukščio. Piramidė sukrauta iš daugiau kaip 2 mln. akmens luitų, kurių kiekvienas sveria apie 2,5 tonos.

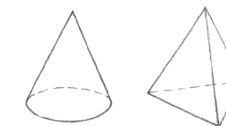


Cheopso piramidė



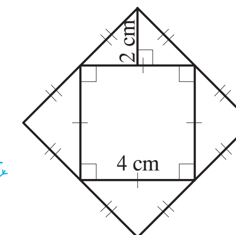
Cheopso piramidės maketas

1) Koks Cheopso piramidės pagrindo briaunos ilgis?
2) Per kiek laiko apeitume piramidę, jei eitume 2 km/h greičiu? Atsakymą parašykite minutėmis.
3) Paveikslėlyje dešinėje pavaizduotas Cheopso piramidės maketas masteliu 1 : 2000. Koks to maketo užimamas plotas kvadratiniais centimetrais?
4) Koks Cheopso piramidės tūris? Atsakymą parašykite standartine skaičiaus išraiška.
5) Kiek kartų piramidės maketo tūris yra mažesnis už piramidės tūrį?



201. Viename matematikos vadovėlyje yra toks uždavinys:

Paveikslėlyje pavaizduota piramidės išklotinė. Apskaičiuokite piramidės vienos šoninės sienos plotą.



Įdomu, koks yra tos piramidės aukštinės ilgis?

Be abejo, paveikslėlyje pavaizduoto trikampio plotą apskaičiuoti nesunku:

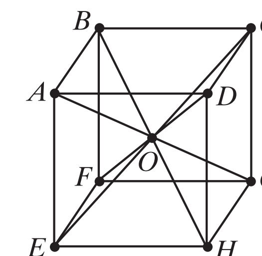
$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4\,(\text{cm}^2).$$

Bėda ta, kad piramidė, kurios išklotinė yra pavaizduota, ***neegzistuoja***. Paaiškinkite kodėl.



Sąlyga. Apskaičiuokite $\triangle ABC$ perimetrą, kai $AB = 1\,\text{cm}$, $BC = 2\,\text{cm}$, $AC = 3\,\text{cm}$.
Sprendimas. $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 1 + 2 + 3 = 6\,(\text{cm})$.
Komentaras. Toks trikampis neegzistuoja, nes trikampio dviejų trumpesniųjų kraštinių ilgių suma turi būti *didesnė už trečiosios kraštinės ilgį*. Bet matome, kad $1 + 2 = 3$.

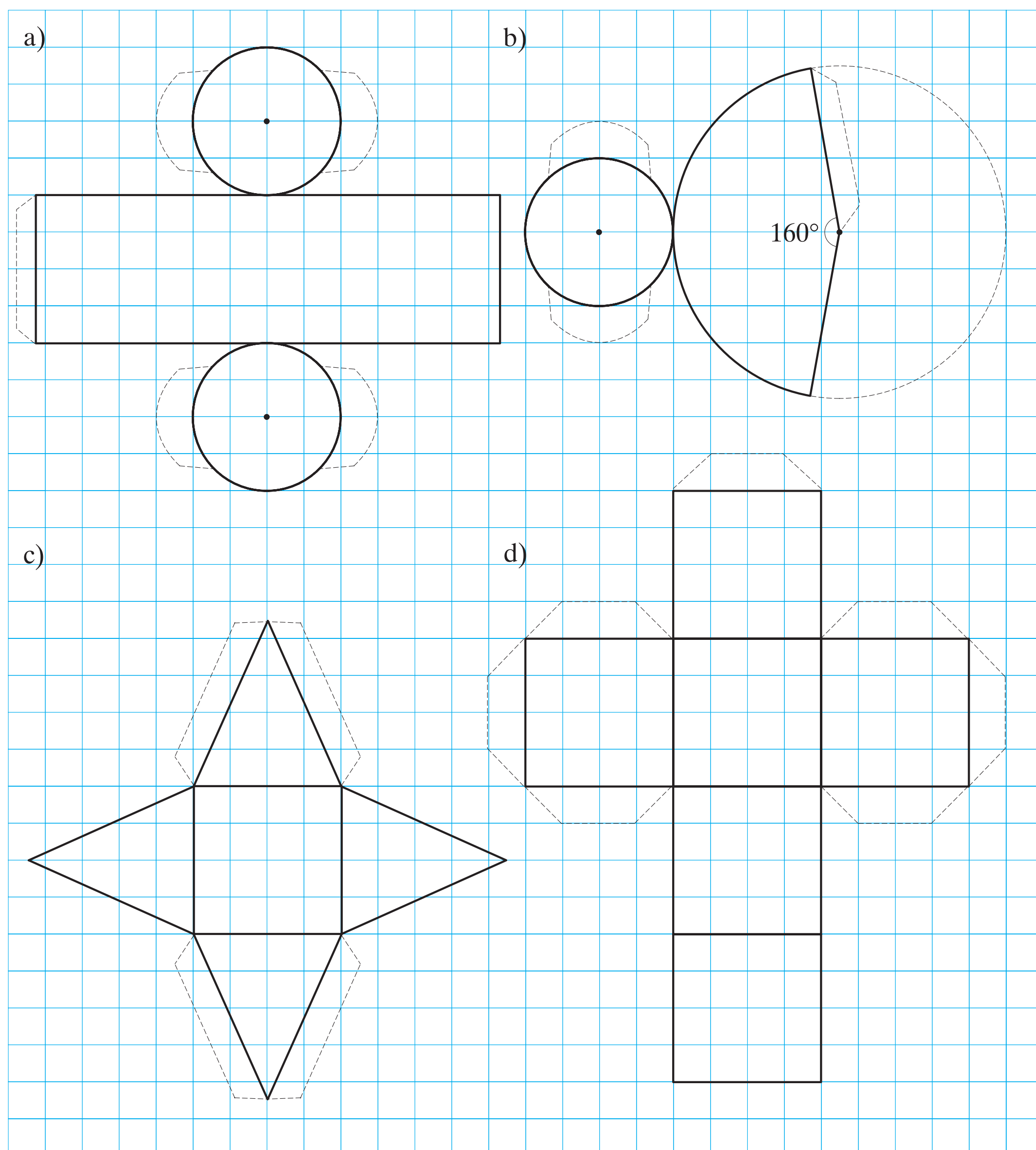
202. Inga iš vamzdelių sukonstravo kubo formos gardelę (žr. pav.).



1) Kokio ilgio yra vamzdeliai, jungiantys gardelės centrą su gardelės viršūnėmis, jei gardelės viršūnes jungiantys vamzdeliai yra 1 dm ilgio?
2) Ant viršūnės A nutūpė boružė. Ji nori iš viršūnės A nuropoti į viršūnę C.
   a) Surašykite visus galimus boružės maršrutus, jei ji ruošiasi ropoti tik dviem bet kuriais vamzdeliais.
   b) Koks trumpiausio boružės maršruto ilgis?
   c) Kiek laiko trumpiausiu maršrutu ropos boružė, jei per sekundę ji nuropoja 3 mm? Atsakymą parašykite sekundės tikslumu.
3) Koks gardelės užimamas tūris kvadratiniais centimetrais?
4) Kiek lygių piramidžių galima pamatyti gardelėje? Kiek kartų vienos tokios piramidės tūris yra mažesnis už gardelės tūrį?
5) Apskaičiuokite piramidės $OABCD$ tūrį kvadratiniais centimetrais.

Panašiųjų erdvinių kūnų tūriai

Prisiminkime skyrelio pradžioje pateiktas keturių erdvinių kūnų išklotines (žr. 82 psl.).



1) Pirmiausia apskaičiuokite kūnų, kurių išklotinės pavaizduotos brėžiniuose a)–d), paviršių plotus kvadratiniais centimetrais:

$S_{\text{Ritinio}} = \dots\dots \text{ cm}^2$, $S_{\text{Kūgio}} = \dots\dots \text{ cm}^2$,
$S_{\text{Kubo}} = \dots\dots \text{ cm}^2$, $S_{\text{Piramidės}} = \dots\dots \text{ cm}^2$.

2) Dabar apskaičiuokite jūsų pagamintų modelių (jie yra keturgubai didesni) paviršių plotus:

$S'_{\text{Ritinio}} = \dots\dots \text{ cm}^2$, $S'_{\text{Kūgio}} = \dots\dots \text{ cm}^2$,
$S'_{\text{Kubo}} = \dots\dots \text{ cm}^2$, $S'_{\text{Piramidės}} = \dots\dots \text{ cm}^2$.

3) Apskaičiuokite santykius:

$$\frac{S'_{\text{Ritinio}}}{S_{\text{Ritinio}}} = \dots\dots, \quad \frac{S'_{\text{Kūgio}}}{S_{\text{Kūgio}}} = \dots\dots, \quad \frac{S'_{\text{Kubo}}}{S_{\text{Kubo}}} = \dots\dots, \quad \frac{S'_{\text{Piramidės}}}{S_{\text{Piramidės}}} = \dots\dots .$$

Panašiųjų figūrų plotų santykis lygus panašumo koeficiento kvadratui.

4) O dabar apskaičiuokite visų keturių kūnų tūrius ir atitinkamus santykius:

$$\frac{V'_{\text{Ritinio}}}{V_{\text{Ritinio}}} = \dots\dots, \quad \frac{V'_{\text{Kūgio}}}{V_{\text{Kūgio}}} = \dots\dots, \quad \frac{V'_{\text{Kubo}}}{V_{\text{Kubo}}} = \dots\dots, \quad \frac{V'_{\text{Piramidės}}}{V_{\text{Piramidės}}} = \dots\dots .$$

Panašiųjų erdvinių kūnų tūrių santykis lygus panašumo koeficiento kubui!

Uždaviniai

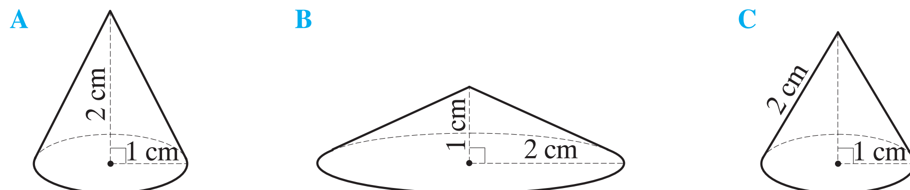
1. Dviejų panašių kūgių panašumo koeficientas lygus 2,5. Koks didesniojo kūgio tūris, jei mažesniojo kūgio tūris lygus 100 dm^3?

2. Dviejų kubų paviršių plotų santykis $S_1 : S_2 = 4 : 25$. Apskaičiuokite didesniojo kubo tūrį, jei mažesniojo kubo tūris lygus 32 cm^3.

Visi kubai yra panašūs!

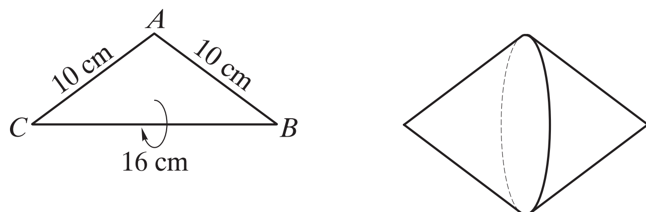
TESTAS

203. Paveikslėlyje pavaizduoti trys kūgiai.



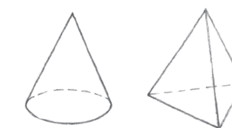
1) Kurio kūgio tūris yra mažiausias?
   A A **B** B **C** C
2) Kurio kūgio šoninio paviršiaus plotas yra didžiausias?
   A A **B** B **C** C
3) Kurio kūgio — **A** ar **B** — sudaromoji yra ilgesnė?
   A A **B** B **C** Yra vienodo ilgio
4) Kurio kūgio — **B** ar **C** — aukštinė yra trumpesnė?
   A B **B** C **C** Yra vienodo ilgio

204. Lygiašonis trikampis ABC ($AB = AC = 10$ cm, $BC = 16$ cm) sukamas apie pagrindą (žr. pav. kairėje).

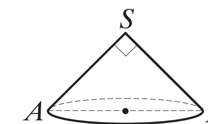


Gautas kūnas sudarytas iš dviejų lygių kūgių (žr. pav. dešinėje).

1) Kokio ilgio gautų kūgių pagrindo spindulys?
   A 16 cm **B** 10 cm **C** 8 cm
2) Kokio ilgio tų kūgių aukštinės?
   A 16 cm **B** 6 cm **C** 8 cm
3) Koks gauto kūno šoninio paviršiaus plotas?
   A 160π cm^2 **B** 80π cm^2 **C** 120π cm^2
4) Koks gauto kūno tūris?
   A 128π cm^3 **B** 96π cm^3 **C** 256π cm^3
5) Į kurią iš nurodytų matmenų stačiakampio gretasienio formos *mažiausią* dėžutę galima įdėti šį kūną?
   A 16 cm × 16 cm × 6 cm **B** 12 cm × 12 cm × 16 cm
   C 16 cm × 12 cm × 20 cm **D** 12 cm × 12 cm × 12 cm

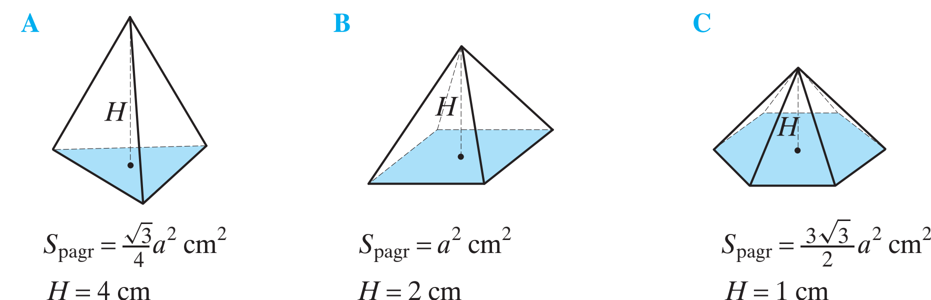


205. Kūgį perpjovus per jo viršūnę ir skersmenį gautas statusis trikampis ASB (AB — kūgio pagrindo skersmuo, S — kūgio viršūnė). Koks $\triangle ASB$ plotas, jei kūgio pagrindo spindulys lygus 5 cm?



A 12,5 cm^2 **B** 25π cm^2 **C** 25 cm^2

206. Paveikslėlyje pavaizduotos trys taisyklingosios piramidės, kurių pagrindų briaunos yra lygios a cm, o piramidžių aukščiai yra nevienodi.

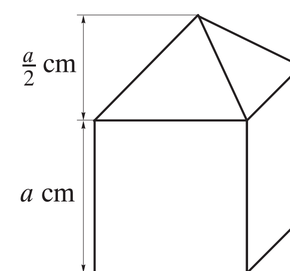


A: $S_{pagr} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ cm^2, $H = 4$ cm
B: $S_{pagr} = a^2$ cm^2, $H = 2$ cm
C: $S_{pagr} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ cm^2, $H = 1$ cm

Kurios piramidės tūris yra didžiausias?

A A **B** B **C** C

207. Paveikslėlyje parodytas statinys, sudarytas iš dviejų dalių — kubo ir taisyklingosios keturkampės piramidės.



1) Koks kubo tūris? **A** a cm^3 **B** a^2 cm^3 **C** a^3 cm^3
2) Koks piramidės tūris? **A** $\frac{a^3}{3}$ cm^3 **B** a^3 cm^3 **C** $\frac{a^3}{6}$ cm^3
3) Koks statinio šoninio paviršiaus plotas?
   A $9a^2$ cm^2 **B** $\left(5a^2+6\sqrt{3}a^2\right)$ cm^2 **C** $11a^2$ cm^2 **D** $4a^2+\sqrt{2}a^2$ cm^2

208. Trikampės piramidės visos briaunos lygios a cm. Koks yra tos piramidės viso paviršiaus plotas?

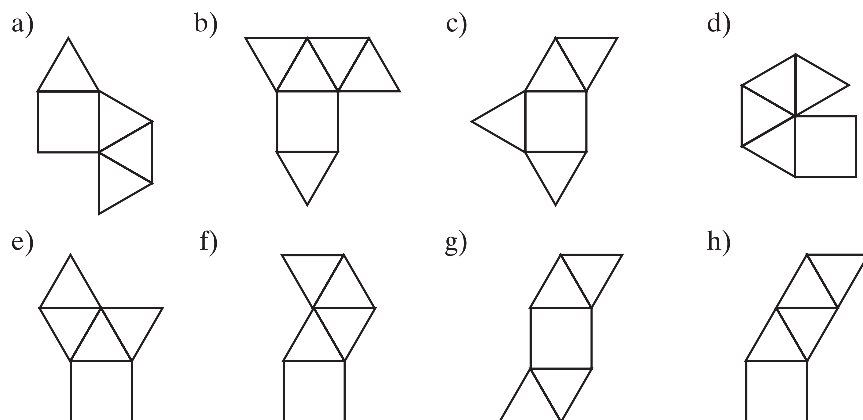
A $\sqrt{3}a^2$ **B** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ **C** $\frac{\sqrt{2}}{3}a^2$ **D** $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

PASITIKRINAME

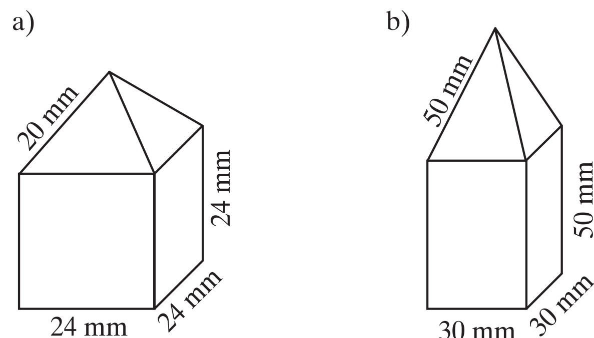
209. Emilija pagamino taisyklingosios keturkampės piramidės formos dėžutę, kurios visų briaunų ilgis yra 10 cm. Dėžutės šonus Emilija apklijavo spalvotu popieriumi.

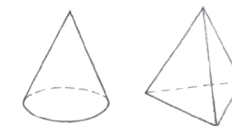
1) Koks dėžutės šoninės sienos aukštis?
2) Koks dėžutės šoninės sienos plotas?
3) Kiek kvadratinių centimetrų spalvoto popieriaus Emilija sunaudojo dėžutės šonams apklijuoti? Atsakymą parašykite 1 cm^2 tikslumu.
4) Kiek kvadratinių centimetrų dėžutės paviršiaus liko neapklijuota?

210. Kurios iš pavaizduotų figūrų yra keturkampės piramidės išklotinės?



211. Iš dviejų kaladėlių sudėtas bokštelis. Viena kaladėlė yra stačiakampio gretasienio formos, o kita — taisyklingosios keturkampės piramidės formos. Apskaičiuokite gautojo erdvinio kūno:
1) viso paviršiaus plotą; 2) tūrį.





212. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė yra a, aukštinė — H, apotema — d, šoninis paviršius — $S_{šon}$, visas paviršius — S_{pav}, tūris — V.
Užpildykite lentelę.

	a	H	d	$S_{šon}$	S_{pav}	V
a)	6		5			
b)	14	24				
c)		3	5			
d)	4			64		
e)	12					240
f)	10				360	

213. 1) Apskaičiuokite kūgio pagrindo plotą S_{pagr}, šoninio paviršiaus plotą $S_{šon}$, tūrį V, kai:
a) pagrindo spindulys $r = 10$ cm, aukštinė $H = 20$ cm;
b) pagrindo spindulys $r = \sqrt{5}$ cm, sudaromoji $l = 10$ cm.

2) Apskaičiuokite kūgio šoninio paviršiaus plotą $S_{šon}$ ir tūrį V, kai:
a) pagrindo plotas $S_{pagr} = 9\pi$ cm^2, sudaromoji $l = 5$ cm;
b) pagrindo plotas $S_{pagr} = 5\pi$ dm^2, aukštinė $H = \sqrt{5}$ dm.

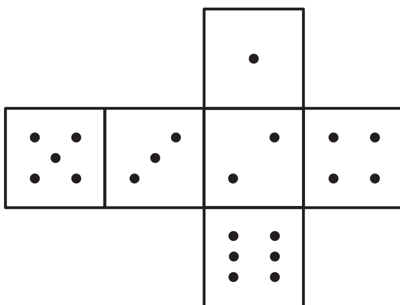
3) Apskaičiuokite kūgio pagrindo plotą S_{pagr} ir tūrį V, kai:
a) šoninio paviršiaus plotas $S_{šon} = 3\pi$ m^2, sudaromoji $l = 3$ m;
b) šoninio paviršiaus plotas $S_{šon} = 15\pi$ dm^2, pagrindo spindulys $r = 3$ dm.

214. Ponia Petraitienė nutarė savo papuošalų dėžutę iš išorės padengti plonu aukso sluoksniu. Dėžutė yra stačiakampio gretasienio, kurio pagrindas — kvadratas, formos. Kvadrato kraštinės ilgis yra 24 cm. Gretasienio aukštis — 12 cm. Iš viršaus dėžutė uždengta taisyklingosios keturkampės piramidės formos dangteliu. Piramidės pagrindas sutampa su gretasienio viršutiniu pagrindu, o piramidės šoninė briauna lygi 20 cm.

a) Nubraižykite dėžutės formą.
b) Apskaičiuokite dėžutės viso paviršiaus plotą.
c) Žinoma, kad 0,00195 g aukso galima padengti 1 cm^2 dėžutės paviršiaus. Apskaičiuokite aukso, reikalingo dėžutei padengti, masę 0,01 g tikslumu.
d) Už darbą meistras ima 20% sunaudoto aukso vertės mokestį. Kiek kainuos dėžutės padengimas auksu poniai Petraitienei, jeigu 1 g aukso kainuoja 70 Lt?

KARTOJAME

215. Paveikslėlyje pavaizduota standartinio šešiasienio lošimo kauliuko išklotinė.



a) Toks kauliukas yra metamas ir užrašomas dviženklis skaičius, kurio pirmasis skaitmuo rodo, kiek akučių yra viršutinėje sienelėje, o antrasis skaitmuo — kiek akučių yra apatinėje sienelėje.

> 16 — viršuje 1 akutė, apačioje 6 akutės

1) Surašykite visus taip galimus gauti dviženklius skaičius. Kiek šis bandymas turi skirtingų baigčių?

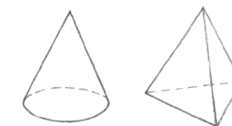
2) Surašykite baigtis, palankias įvykiui:
A — gautasis skaičius yra lyginis;
B — gautasis skaičius yra natūraliojo skaičiaus kvadratas;
C — gautasis skaičius nesidalija iš 4;
D — gautojo skaičiaus skaitmenų suma lygi 7;
E — gautasis skaičius yra ne didesnis už 52;
F — gautąjį skaičių dalijant iš 11, gaunama liekana lygi 1.

> Įvykiui V — gautasis skaičius dalijasi iš 17 — yra palanki viena baigtis: V = {34}. Šio įvykio tikimybė $\mathbf{P}(V) = \frac{1}{6}$.

3) Apskaičiuokite įvykių A, B, C, D, E ir F tikimybes.

4) Kuri iš baigčių A, B, C, D, E, F yra labiausiai tikėtina? mažiausiai tikėtina? Ar tarp tų baigčių yra vienodai tikėtinų?

b) Kokia tikimybė, kad, metus tokį kauliuką, ant šoninių sienelių esančių akučių suma bus lygi 14? bus mažesnė už 14? bus didesnė už 14?



PRISIMENAME TAI, KO PRIREIKS KITAME SKYRIUJE

216. Buvo surinkti duomenys apie klasės mokinių namuose laikomus gyvūnus.

GYVŪNAS	Šuo	Katė	Žuvys	Neturi
MOKINIŲ SKAIČIUS	IIIII IIIII III	IIIII II	II	III

a) Kiek mokinių buvo apklausta, jei žinoma, kad kiekvienas mokinys laiko ne daugiau kaip vieną gyvūną?
b) Kuri dalis apklaustų mokinių laiko žuvis? Atsakymą parašykite paprastąja trupmena ir dešimtaine trupmena.
c) Duomenis pavaizduokite stulpeline diagrama.

217. Dešimt jaunųjų gamtininkų tikrino gėlių sėklų daigumą. Kiekvienas pasėjo po 10 sėklų. Sudygusių sėklų skaičiai buvo tokie:

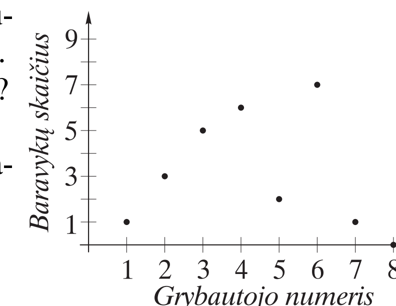
9, 8, 2, 8, 7, 7, 9, 7, 6, 6.

1) Duomenis pavaizduokite stulpeline diagrama.
2) Užpildykite lentelę:

SUDYGUSIŲ SĖKLŲ SKAIČIUS	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
KIEKIS	0						2				

3) Kuri visų pasėtų sėklų dalis sudygo? Atsakymą parašykite paprastąja trupmena, dešimtaine trupmena ir procentais.

218. Diagrama vaizduoja, kiek baravykų surinko kiekvienas iš aštuonių grybautojų.
1) Kiek buvo surinkta baravykų iš viso?
2) Sudarykite dažnių lentelę.
3) Apskaičiuokite, kiek vidutiniškai baravykų rado kiekvienas grybautojas.



219. Surašykite savo šiais mokslo metais gautus matematikos pažymius.
1) Sudarykite pažymių dažnių lentelę.
2) Pavaizduokite duomenis taškine diagrama.
3) Apskaičiuokite pažymių vidurkį.
4) Palyginkite visų pažymių vidurkį su pirmojo trimestro (pusmečio) pažymiu.
5) Jei jums šį trimestrą (pusmetį) išeina mažiau nei 10, tai nustatykite, kiek dešimtukų turite gauti, kad išeitų vienu pažymiu daugiau negu išeina dabar.

Dar vieni mokslo metai baigiasi ...

Štai ir pasiekėme finišo tiesiąją. Liko tik paskutinė tema. Suprantama, kad, artėjant vasarai, jūsų mintys vis stengiasi nutolti nuo mokslų. Vis sunkiau prisiversti mokytis, atlikinėti namų darbus, spręsti uždavinius, rašyti kontrolinius... Pavargote ne tik jūs, bet ir mokytojai.

Tai suprasdami, šį paskutinįjį vadovėlio skyrių parengėme kiek kitokį. Mes paprasčiausiai jį patrumpinome atsisakydami įvadinės užduoties bei skyrelių „Apibendriname“, „Sprendžiame“, „Pasitikriname“, „Kartojame“.

Šį skyrių sudaro viso labo trys atverstiniai, trys menkučiai klausimėliai, kuriuos nagrinėjant galima ir labai neįsitempti. Galima dirbti grupėmis ar užsiimti projektine veikla.



Statistika ir tikimybės

Šiame skyriuje vėl mokysimės skaityti ir suprasti lentelėse ir diagramomis pateiktus statistinius duomenis.



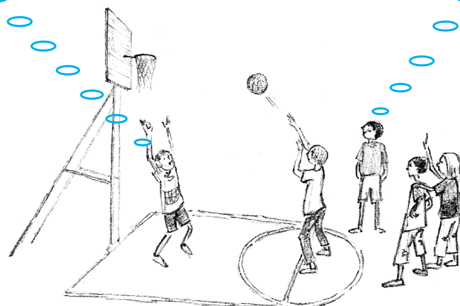
- Tyrinėsime įvairius bandymus.
- Prisiminsime, kas yra bandymo baigtis.
- Prisiminsime, kaip užrašomos su bandymu susijusio įvykio baigtys.
- Prisiminsime, kaip skaičiuojama bandymo baigties ar įvykio tikimybė.
- Susipažinsime su tarpusavyje susijusiais dydžiais.

8.1. KAS TAIKLIAUSIAS?

Penki draugai per kūno kultūros pamoką bandė išsiaiškinti, kuris iš jų yra taikliausias baudų metikas.

Kiekvienas mesime į krepšį po 20 kartų.

Laimės tas, kuris pataikys daugiausiai kartų.



Bet pamoka baigėsi ne visiems spėjus atlikti po 20 metimų. Rezultatai surašyti į tokią lentelę.

	TADAS	JONAS	PAULIUS	DARIUS	ROKAS
METĖ	20	20	20	15	10
PATAIKĖ	10	12	8	7	5

Užduotis.

1) Panagrinėkite lentelės duomenis ir pasvarstykite, kurį iš draugų vertėtų pripažinti nugalėtoju.
2) Užrašykite, kurią visų metimų dalį pataikė kiekvienas iš vaikų. Atsakymą užrašykite paprastąja trupmena, dešimtaine trupmena ir procentais.

Tadas metė 20 kartų, 10 kartų pataikė, todėl jo pataikytų metimų dalis lygi $\frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0{,}5$, t. y. 50%.

3) Pagalvokite, kaip patogiausia apibūdinti krepšininko baudų metimo taiklumą.

Visų metimų skaičių pažymėkime m.
Pataikytų metimų skaičių pažymėkime p.

$\frac{p}{m}$ ← pataikyta
← mesta

Santykis $\frac{p}{m}$ parodo, kuri visų metimų dalis buvo taikli.



220. ***Krepšinio rungtynių statistika.***

a) Dvi šeimų komandos žaidė krepšinio rungtynes trys prieš tris. Lentelėse pateikta kiekvienos komandos žaidėjų tritaškių (3t), dvitaškių (2t) ir baudų metimų (1t) pataikymų statistika.

Vanagai	3t	2t	1t
Valdas	2/4	5/7	4/6
Vaida	0/0	7/20	1/2
Paulius	1/3	5/5	2/3

Grybauskai	3t	2t	1t
Petras	1/1	6/10	1/4
Vlada	0/1	7/11	0/0
Daiva	3/3	0/0	1/1

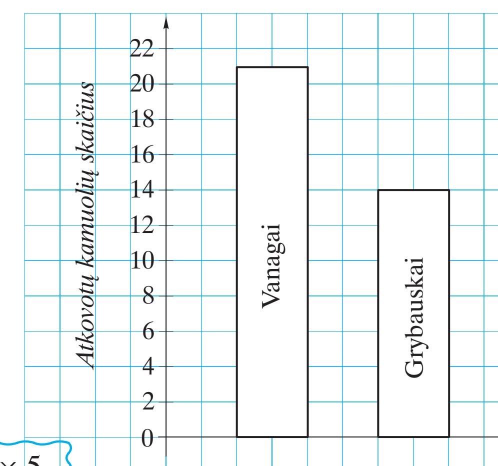
Paulius iš 3 tritaškių pataikė 1.

Daiva metė 1 baudos metimą ir pataikė.

1) Kuri komanda ir kokiu rezultatu laimėjo varžybas?
2) Apskaičiuokite, kiek taškų pelnė kiekvienas žaidėjas.
3) Kurią dalį mestų tritaškių pataikė Valdas? Daiva? Paulius? Atsakymus parašykite paprastosiomis trupmenomis ir procentais.
4) Kurią visų metimų dalį pataikė kiekvienas žaidėjas? Atsakymus parašykite dešimtainėmis trupmenomis.
5) Kurią visų mestų tritaškių dalį pataikė Vanagai? Grybauskai?
6) Kuri komanda taikliau mėtė dvitaškius?
7) Sugalvokite daugiau klausimų, susijusių su pateikta rungtynių statistika, ir atsakykite į juos.

b) Stulpelinė diagrama vaizduoja, kiek kuri komanda atkovojo nuo krepšio atšokusių kamuolių.

1) Kiek kamuolių atkovojo kiekviena komanda?
2) Kurią visų atkovotų kamuolių dalį atkovojo Vanagai? Atsakymą parašykite paprastąja trupmena, dešimtaine trupmena, procentais.
3) Kiekvienos komandos atkovotų kamuolių dalį pavaizduokite stačiakampio dalimis, t. y. stačiakampe diagrama.



Nusibraižykite stačiakampį 7 × 5.

8.2. KAS ATVIRS DAŽNIAU?

Penkios draugės atliko bandymą su monetomis.

Kiekviena monetas mesime po 20 kartų.



Suskaičiuosime, kiek kartų abi monetos atvirs skaičiumi.



Gauti rezultatai surašyti lentelėje.

Rima	Lina	Gita	Ona	Veta
5	6	7	4	2

Užduotis.

1) Kurią kiekvienos mergaitės visų metimų dalį monetos atvirto skaičiumi? Kiekvienos mergaitės monetų atvirtimo skaičiumi dažnį užrašykite paprastąja trupmena, dešimtaine trupmena ir procentais.

Ona metė 20 kartų. Skaičiai ant abiejų monetų atvirto 4 kartus.

Vadinasi, Onos metimų abiejų skaičių atvirtimo dažnis yra $\frac{4}{20} = 0{,}2$, t. y. 20%.

2) Dabar susumuokite visų mergaičių bandymų rezultatus:
   - apskaičiuokite, kiek kartų monetas metė visos mergaitės kartu;
   - apskaičiuokite, kiek kartų abi monetos atvirto skaičiumi;
   - apskaičiuokite abiejų monetų atvirtimo skaičiumi dažnį.

3) Atlikite tokį patį bandymą klasėje ir palyginkite savo asmeninius rezultatus su visos klasės rezultatais.

- Meskite dvi monetas 20 kartų.
- Apskaičiuokite, kiek kartų jūsų abi monetos atvirto skaičiumi.
- Apskaičiuokite abiejų monetų atvirtimo skaičiumi santykinį dažnį.
- Apskaičiuokite visos klasės monetų atvirtimo skaičiumi santykinį dažnį. ir palyginkite su savo gautu dažniu.

4) O dabar pabandykite atsakyti į tokį klausimą:
   Kokia tikimybė, kad, metant dvi monetas, abi monetos atvirs skaičiumi?

1) Surašykite visas galimas baigtis. {Ss, Sh, ...}.
2) Kiek skirtingų baigčių yra iš viso?
3) Kiek yra baigčių, palankių įvykiui „Abi monetos atvirto skaičiumi“?
4) Apskaičiuokite įvykio „Abi monetos atvirto skaičiumi“ tikimybę.



$P = \frac{1}{4}$

221. ***Monetos mėtymas.***
Įsivaizduokime, kad rengiamės mesti monetą 100 kartų. Kiek kartų iš tų 100 metimų moneta atvirs herbu į viršų?

Gal penkiasdešimt? — Gal taip, o gal ir ne!

Gal keturiasdešimt? — Kodėl gi ne!

Gal aštuoniasdešimt? — Gali būti, bet nebūtų išmintinga dėl to lažintis.

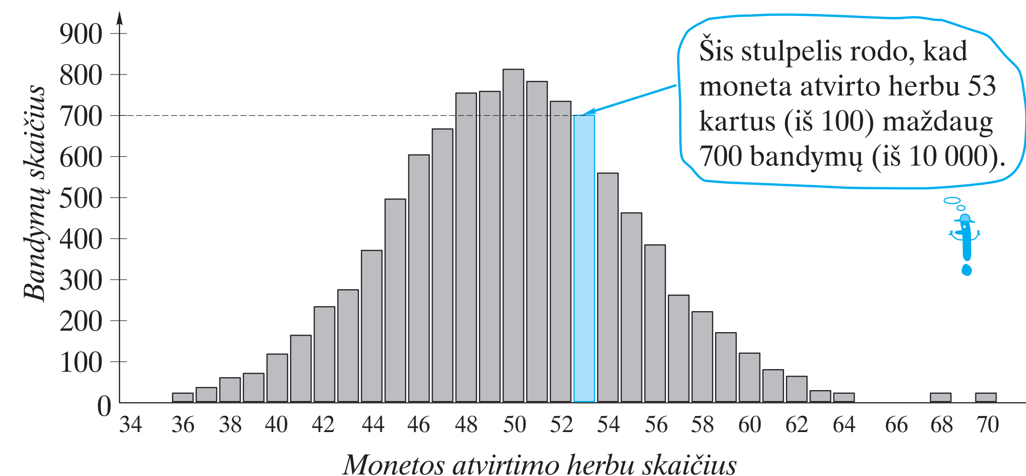
Suprantama, kad herbas gali atvirsti:

0 kartų, 1 kartą, 2 kartus, ..., 50 kartų, ..., 100 kartų.

Žinoma, kai kurios herbo atvirtimo reikšmės yra mažai tikėtinos, kitos gi atvirkščiai — labai tikėtinos.

Matematikas Džonas Kerichas, vokiečių įkalintas Antrojo pasaulinio karo metais, kalėjime atliko 10 000 bandymų! Kiekvienas bandymas — tai 100 metimų užrašant, kelis kartus iš tų 100 metimų atvirto herbas. Tai reiškia, kad moneta buvo mesta $10\,000 \cdot 100 = 1\,000\,000$ kartų. Šimtui monetos metimų ir rezultatams užrašyti reikia apie 5 minučių. Mėtant monetą po 8 valandas per parą 7 paras per savaitę — tokiam bandymui atlikti reikėtų 3 mėnesių...

Stulpelinėje diagramoje pavaizduoti Kericho bandymų rezultatai.



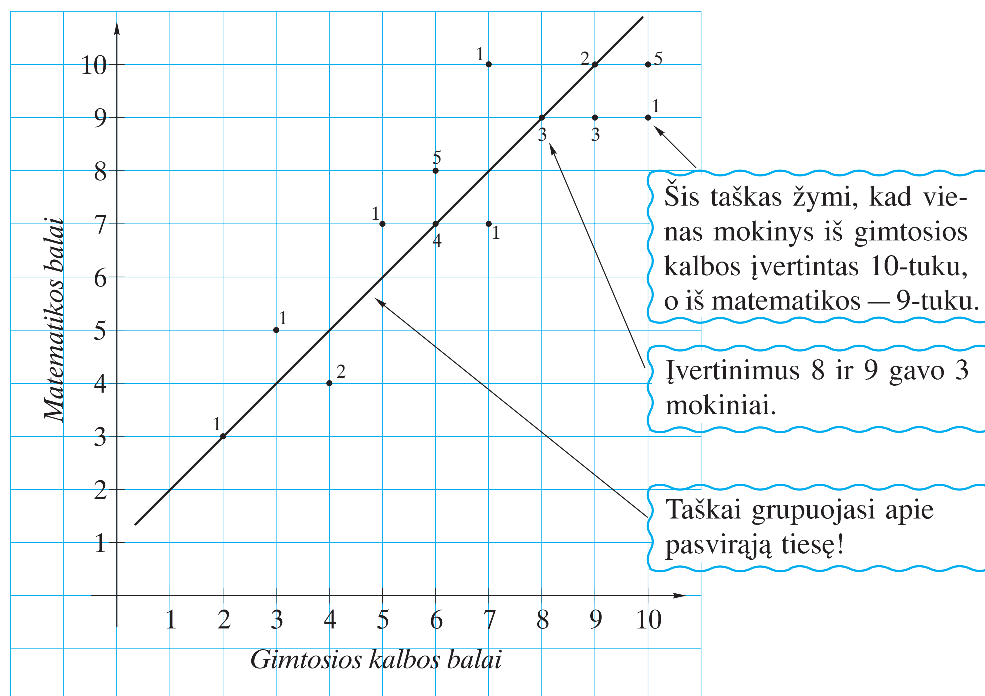
Remdamiesi šia diagrama, pasvarstykite, kokia maždaug tikimybė, kad, metant monetą 100 kartų, lygiai 50 kartų atvirs herbas?

8.3. AR YRA RYŠYS?

Vienoje nykštukinėje valstybėlėje buvo nuspręsta patikrinti, ar teisingas yra teiginys:



Tos valstybėlės mokslininkai surinko duomenis — visų mokinių gimtosios kalbos ir matematikos baigiamųjų egzaminų pažymius (joje, kaip ir Lietuvoje, vertinimo sistema 10-balė). Surinktus duomenis mokslininkai pateikė tokia diagrama.



Klausimai.

1) Kaip manote, ar galima tvirtinti, kad yra aiškus ryšys tarp mokinių gimtosios kalbos ir matematikos žinių? Matematikai šį klausimą formuluoja taip: „Ar gimtosios kalbos ir matematikos balai ***koreliúoja***?“
2) Kiek mokinių toje valstybėlėje laikė egzaminus?
3) Apskaičiuokite matematikos pažymių vidurkį; gimtosios kalbos pažymių vidurkį.
4) Patikrinkite, ar tą patį būtų galima teigti apie jūsų klasės mokinius; jūsų mokyklos 9-tokus.

Pažaiskime su lapeliais

Dėžėje yra 10 lapelių, ant kurių užrašyta po vieną skaičių. Apie tuos 10 skaičių žinoma tik tiek:
1) visi skaičiai yra skirtingi;
2) kiekvienas skaičius gali būti tiek teigiamas, tiek neigiamas, tiek sveikas, tiek trupmeninis, tiek didelis, tiek mažas, ...
Žinoma, dėžėje yra vienas lapelis, ant kurio užrašytas skaičius yra didesnis už kitus devynis skaičius.

Įsivaizduokite, kad jūs iš tos dėžės nežiūrėdami traukiate vieną lapelį. Pasižiūrite, koks ten užrašytas skaičius. Dabar jūs turite apsispręsti, ar ištrauktas lapelis yra su didžiausiu skaičiumi. Jei manote, kad tai lapelis su didžiausiu skaičiumi, tai belieka patikrinti, ar jūs teisus. Jei manote, kad ištraukto lapelio skaičius nėra didžiausias, tai šį lapelį dedate ant stalo, o iš dėžės traukiate kitą lapelį. Pasižiūrėję į jo skaičių, turite apsispręsti, ar jis yra didžiausias. Žinoma, šiuo atveju jūs jau žinote ir pirmojo ištraukto lapelio skaičių!
Taip jūs galite traukti iki paskutiniojo (10-tojo) lapelio. Tikslas — ištraukus n-tąjį lapelį ($1 \leqslant n \leqslant 10$), pasakyti, kad jo skaičius yra didžiausias, t. y. reikia sugalvoti strategiją, kurios laikantis tikimybė laimėti būtų kuo didžiausia!
Tokia strategija egzistuoja. Laikantis jos, laimėjimo garantija didesnė nei 25%!

Klausimėliai.

1) Kokia tikimybė, kad pirmas ištrauktas lapelis bus su didžiausiu skaičiumi?
2) Kokia tikimybė, kad, ištraukus 5 lapelius, „išlošiamasis“ lapelis dar bus dėžėje?
3) Įsivaizduokite, kad jūsų pirmieji keturi ištraukti lapeliai buvo su skaičiais (eilės tvarka):

| -10 | 50 | $\sqrt{100}$ | $\frac{99}{2}$ |

Kadangi ketvirtojo lapelio skaičius $\frac{99}{2}$ mažesnis už antrojo lapelio skaičių 50, tai jūs traukiate 5 lapelį. Jo skaičius | 51 |. Pasvarstykite, ar verta sustoti?

Ko gero į šiuos „klausimėlius“ atsakyti bus nelengva...
Gal atsiras tokių, kurie šį uždavinį patikės kompiuteriui?

5 skyrius

75. a) $x = -2;\ 0;\quad x = 0;\ 2;\quad x = 0;\ 2;\quad x = 0;\ -2;$
b) $x = -\frac{5}{3};\ 0;\quad x = 0;\ \frac{5}{3};\quad x = 0;\ \frac{5}{3};\quad x = -\frac{5}{3};\ 0;$
c) $x = -3;\ 0;\quad x = 0;\ \frac{1}{3};\quad x = 0;\ \frac{3}{5}.$

76. a) $x = -2;\ 2;\quad \varnothing;$ b) $x = -3;\ 3;\quad \varnothing;$ c) $x = -0{,}5;\ 0{,}5;\quad \varnothing;$
d) $x = -\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\quad \varnothing;$ e) $x = -10;\ 10;\quad \varnothing;$ f) $x = 0;\ x = 0;\ x = 0;$
g) $x = -\sqrt{5};\ \sqrt{5};\quad \varnothing;\quad x = -\sqrt{5};\ \sqrt{5};\quad \varnothing;$
h) $x = -\sqrt{10};\ \sqrt{10};\quad x = -\sqrt{9\frac{1}{2}};\ \sqrt{9\frac{1}{2}};\quad x = -\sqrt{10\frac{1}{2}};\ \sqrt{10\frac{1}{2}};\quad \varnothing.$
Pastaba. Ženkliukas $\varnothing$ (*skaitome* — tuščia aibė) žymi, kad lygtis sprendinių neturi.

77. a) $x = 3;\ 4;$ b) $x = 1;\ 5;$ c) $x = -7;\ -1;$ d) $\varnothing;$ e) $x = -3;$ f) $\varnothing;$
g) $x = 2 - \sqrt{3};\ 2 + \sqrt{3};$ h) $x = \frac{1}{2};$ i) $x = -1\frac{1}{3};$ j) $x = -\frac{1}{2};\ 3;$
k) $x = 1;\ 1\frac{2}{3};$ l) $x = \frac{1}{6}.$

78. a) 14 cm; b) 12 m; c) 8,4 mm.

79. 20 m, 40 m.

80. 9 cm, 12 cm, 54 cm^2.

81. 96 cm^2.

82. a) $-3;\ 4;$ b) -18 ir -8; 8 ir 18; c) 2 ir 3.

83. 3 m.

84. 1) 12 cm ir 8 cm; 2) 18 cm^2; 3) $12 + 6\sqrt{2}$ cm.

6 skyrius

137. $k = 2$ (arba $k = \frac{1}{2}$).

138. $A_1C_1 = 2,\ B_1C_1 = 4,\ A_1B_1 = 2\sqrt{3},$
$\angle A_1 = 90^\circ,\ \angle B_1 = 30^\circ,\ \angle C_1 = 60^\circ.$

139. 1) a) Kampai lygūs;
b) $\frac{AC}{FE} = \frac{AB}{FD} = 2,\ \angle A = \angle F$ — pagal dvi proporcingas kraštines ir lygų kampą tarp jų;
c) $ED = 400,\ \frac{ED}{BC} = \frac{EF}{BA} = \frac{FD}{AC} = 10$ — pagal tris proporcingas kraštines.
2) a) $AB,\ ED;\ AC,\ EF;\ BC,\ DF;\ \angle A,\ \angle E;\ \angle B,\ \angle D;\ \angle C,\ \angle F;$
b) $AB,\ FD;\ AC,\ FE;\ BC,\ DE;\ \angle A,\ \angle F;\ \angle B,\ \angle D;\ \angle C,\ \angle E;$
c) $AB,\ FE;\ AC,\ FD;\ BC,\ ED;\ \angle A,\ \angle F;\ \angle B,\ \angle E;\ \angle C,\ \angle D.$

140. 4) $\frac{BC}{B_1C_1} = k,\quad \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{1}{k};$
$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = k,\quad \frac{P_{\triangle A_1B_1C_1}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{1}{k};$
$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = k^2,\quad \frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{k^2}.$

141. 1) $\triangle ABC \backsim \triangle DEF,\ k = 2.$
2) $(-5;\ -1),\ (-5;\ 2),\ (-4;\ 0);\quad 3,\ \sqrt{2},\ \sqrt{5}.$

142. 3) 17,5 cm^2; 4) 437,5 mm^2; 5) $\frac{\sqrt{101}}{2}$ cm; 6) $\frac{5\sqrt{101}}{2}$ mm;
7) $AM = \frac{10\sqrt{101}}{3}$ mm, $MD = \frac{5\sqrt{101}}{3}$ mm.

7 skyrius

209. 1) $5\sqrt{2}$ cm; 2) $25\sqrt{3}$ cm^2; 3) ≈ 173 cm^2; 4) 100 cm^2.

210. c), e), f), g).

211. a) 1) 3648 mm^2; 2) $13\,824 + 768\sqrt{7}$ mm^3;
b) 1) $690 + 300\sqrt{91}$ mm^2; 2) $45\,000 + 1500\sqrt{82}$ mm^3.

212.

	a	H	d	$S_{šon}$	S_{pav}	V
a)	6	4	5	60	96	48
b)	14	24	25	700	896	1568
c)	8	3	5	80	144	64
d)	4	$2\sqrt{15}$	8	64	80	$\frac{32\sqrt{15}}{3}$
e)	12	5	$\sqrt{61}$	$24\sqrt{61}$	$144 + 24\sqrt{61}$	240
f)	10	12	13	260	360	400

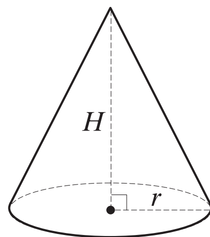
213. 1) a) $S_{pagr} = 100\pi$ cm^2, $S_{šon} = 100\pi\sqrt{5}$ cm^2, $V = \frac{2000}{3}\pi$ cm^3;
b) $S_{pagr} = 5\pi$ cm^2, $S_{šon} = 10\sqrt{5}\pi$ cm^2, $V = \frac{5\sqrt{95}\pi}{3}\pi$ cm^3;
2) a) $S_{šon} = 15\pi$ cm^2, $V = 12\pi$ cm^3;
b) $S_{šon} = 5\sqrt{2}\pi$ dm^2, $V = \frac{5\sqrt{5}}{3}\pi$ dm^3;
3) a) $S_{pagr} = \pi$ m^2, $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ m^3;
b) $S_{pagr} = 9\pi$ dm^2, $V = 12\pi$ dm^3.

214. b) 2496 cm^2; c) $\approx 4{,}87$ g; d) 68,18 Lt.

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$: $\quad x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$ax^2 + bx = 0 \quad (a \neq 0,\ b \neq 0)$: $\quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$

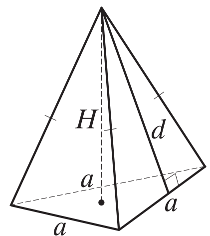
$ax^2 + c = 0 \quad (a \neq 0,\ c \neq 0)$:
- kai $\frac{c}{a} > 0$, tai sprendinių nėra
- kai $\frac{c}{a} < 0$, tai $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$



$S_{\text{pagr}} = \pi r^2$

$S_{\text{šon}} = \pi r l$

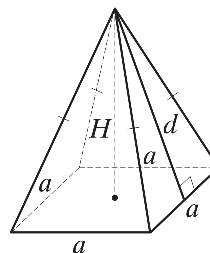
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$



$S_{\text{pagr}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$S_{\text{šon}} = \frac{3}{2}ad$

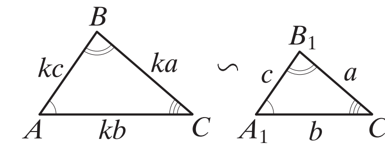
$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 H$



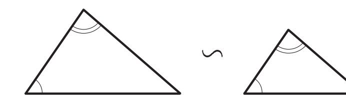
$S_{\text{pagr}} = a^2$

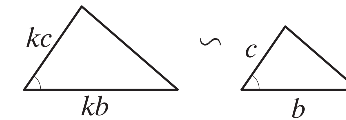
$S_{\text{šon}} = 2ad$

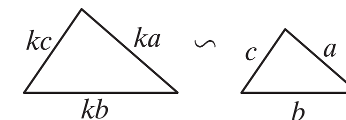
$V = \frac{1}{3}a^2 H$

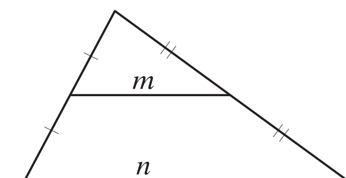


$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k, \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$









$m \parallel n, \quad m = \frac{n}{2}$

